



Méthodes statistiques pour le calcul d'interférences électromagnétiques extrêmes au sein de systèmes complexes

Mourad Larbi

► To cite this version:

Mourad Larbi. Méthodes statistiques pour le calcul d'interférences électromagnétiques extrêmes au sein de systèmes complexes. Electronique. INSA de Rennes, 2016. Français. NNT : 2016ISAR0001 . tel-01308298

HAL Id: tel-01308298

<https://theses.hal.science/tel-01308298>

Submitted on 27 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

UNIVERSITE
BRETAGNE
LOIRE

THESE INSA Rennes
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire
pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE L'INSA RENNES
Spécialité : Electronique et Télécommunications

présentée par

Mourad LARBI

ECOLE DOCTORALE : MATISSE

LABORATOIRE : IETR

Méthodes statistiques pour le calcul d'interférences électromagnétiques extrêmes au sein de systèmes complexes

Thèse soutenue le 11.02.2016
devant le jury composé de :

Elodie RICHALOT

Professeur, Université Paris-Est Marne-la-Vallée (UPEM) / Présidente

Flavio CANAVERO

Professeur, Politecnico di Torino / Rapporteur

Pierre BONNET

Professeur, Université de Clermont-Ferrand / Rapporteur

Éric KERHERVÉ

Ingénieur, DGA/DT/ST/IP/CGN/GE / Examineur

Philippe BESNIER

Directeur de recherche CNRS, IETR / Directeur de thèse

Bernard PECQUEUX

Ingénieur de recherche, CEA/Gramat / Co-encadrant de thèse

Frédéric PUYBARET

Ingénieur de recherche, CEA/Gramat / Co-encadrant de thèse

Méthodes statistiques pour le calcul d'interférences électromagnétiques extrêmes au sein de systèmes complexes

Mourad LARBI



La prolifération des électroniques et des émetteurs radiofréquences rend de plus en plus compliqué le processus de conception des systèmes sur le plan CEM. Ce processus doit aboutir à limiter le risque d'interférences ou de défauts au niveau le plus faible notamment dans le contexte des interférences électromagnétiques intentionnelles (IEMI). Ces défauts CEM doivent alors être anticipés lors de la phase de conception. Cependant, du fait de la dispersion des valeurs prises par certains paramètres du système, la modélisation déterministe éprouve quelques difficultés à identifier le risque encouru. La mauvaise connaissance de l'effet des incertitudes associées au système, aboutit alors à prendre des marges de conception considérables conduisant à des surcoûts de fabrication. Pour cette raison, il est devenu important de prendre en compte l'impact des incertitudes des différents paramètres constitutifs d'un système (en phase de conception). Ces paramètres sont essentiellement géométriques (e.g. position de câblages) ou électromagnétiques (e.g. caractéristiques intrinsèques de matériaux). Ils influent par nature sur les performances CEM de ce système.

Ces travaux de thèse portent sur l'analyse de la propagation des incertitudes relatives à ces paramètres sur des sorties de modèles de CEM. Le but visé, consiste à quantifier sous une forme probabiliste, le risque de défaut d'un système contenant de nombreux paramètres incertains. Ce type d'étude statistique devrait également permettre, via des analyses de sensibilité, des stratégies de conception de systèmes « fiables » ou à moindres coûts.

Dans le contexte des applications visées, les approches dites « fiabilistes » et la méthode dite de « stratification contrôlée », ont été identifiées comme intéressantes, du point de vue de l'analyse d'événements extrêmes.

Dans un premier temps, nous nous sommes consacrés à la transposition des méthodes fiabilistes dans un contexte CEM. Ces techniques permettent de quantifier la probabilité de défaillance d'un système, définie comme la probabilité de dépassement d'un seuil de risque, et renseignent, via une analyse de sensibilité locale, sur les paramètres clés à ajuster.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à la méthode de stratification contrôlée, non appliquée à ce jour à notre connaissance en CEM. L'objectif de cette approche consiste à estimer un quantile extrême de la réponse d'intérêt d'un modèle rigoureux, via l'utilisation d'un modèle simple beaucoup moins coûteux en termes de temps de calcul. Ce processus permet d'accélérer l'obtention d'observations extrêmes, nécessaires à l'estimation du quantile recherché.

Les deux techniques ont été mises en oeuvre sur un problème complexe dans un contexte IEMI, pour estimer la probabilité d'occurrence d'événements d'interférences extrêmes. Elles ont permis de dégager des tendances similaires, quant à l'importance de certains paramètres d'entrée incertains sur les événements rares.

Les deux méthodes, bien appliquées, pourraient constituer un apport considérable en matière de conception CEM.

The proliferation of electronic and radio frequency transmitters makes more complicated the system design process on an EMC point of view. This process should lead to limit the risk of interferences or defects to the lowest level particularly in the context of intentional electromagnetic interferences (IEMI). Therefore, these EMC defects have to be anticipated during the design stage. However, due to the dispersion of the values taken by some parameters of the system, the deterministic modeling presents some difficulties to identify the involved risk. The poor knowledge of the uncertainties effect associated with the system, leads then to take important design margins at the price of additional costs of manufacturing. For this reason, it has become important to take into account the impact of uncertainties of the various constituent parameters of a system (at the design stage). These parameters are essentially geometric (e.g. position of wirings) or electromagnetic (e.g. intrinsic characteristics of materials) ones. They influence by nature the EMC performance of this system.

This thesis work deals with the analysis of the propagation of uncertainties of these parameters on EMC model outputs. It aims at quantifying in a probabilistic form, the default risk of a system containing numerous uncertain parameters. This type of statistical analysis should also allow through sensitivity analyses, design strategies of "reliable" systems or at lower cost.

In the context of targeted applications, the so-called "reliability approaches" and the "controlled stratification" method have been identified as interesting from the point of view of the analysis of extreme events.

Firstly, we are dedicated to the transposition of reliability methods in an EMC context. These techniques are used to quantify the probability of failure of a system, defined as the probability of exceeding a threshold of risk. They also inform through a local sensitivity analysis, on the key parameters to adjust.

Secondly, we have focused our work on the controlled stratification method, not yet applied in EMC as far as we know. The objective of this approach is to estimate an extreme quantile of the interest response of a rigorous model, using of a much cheaper simple model in terms of computation time. This process allows to speed up the identification of extreme observations required for the estimation of the researched quantile.

Both techniques have been applied on a complex problem in an IEMI context, to estimate the probability of occurrence of extreme interference events. They have revealed similar trends as regards to the importance of some uncertain input parameters on rare events.

Both methods, properly applied, could provide a significant contribution in terms of EMC design strategy.

Remerciements

Ces travaux de thèse sont le fruit d'une collaboration entre l'Institut d'Electronique et de Télécommunications de Rennes (IETR) et le Commissariat à l'Energie Atomique et aux Energies Alternatives (CEA) de Gramat. Cette thèse a été financée par la Direction Générale de l'Armement (DGA).

Mes sincères remerciements s'adressent à Monsieur **Philippe Besnier**, Directeur de recherche CNRS, qui m'a accompagné pendant ces trois années en tant que Directeur de thèse, et qui m'a confié ce projet de thèse au sein de l'IETR. J'aimerais particulièrement le remercier pour sa grande disponibilité et pour nos discussions fructueuses. Cette thèse a été une excellente expérience pour moi, et cela en grande partie grâce à la qualité de son encadrement.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à mes encadrants, Monsieur **Bernard Pecqueux** et Monsieur **Frédéric Puybaret**, Ingénieurs de recherche au CEA de Gramat. Je les remercie pour leur encadrement ainsi que pour leur soutien sur les plans scientifique et humain. Une grande part de la réussite de cette thèse leur revient également.

J'adresse ma reconnaissance à Madame **Elodie Richalot**, Professeur à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée (UPEM), de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie Monsieur **Pierre Bonnet**, Professeur à l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand et Monsieur **Flavio Canavero**, Professeur à Politecnico di Torino, pour avoir accepté de rapporter sur ma thèse.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur **Eric Kerhervé**, Ingénieur DGA, pour avoir accepté d'examiner mes travaux de thèse.

Je témoigne également ma gratitude envers mes chefs de laboratoire au CEA de Gramat, **Jean-Pierre Percaille** et **Laurent Labarbe**. Je leur témoigne ma sympathie pour le suivi sans faille de ces travaux de thèse. Ce fut un réel plaisir d'échanger avec eux durant les réunions, en particulier, sur l'interprétation physique des résultats.

J'exprime également mes remerciements à **Pierre Bruguière**, Assistant scientifique au CEA de Gramat, ainsi qu'à **Dominique Serafin**. Je les remercie pour leur disponibilité et nos échanges, notamment sur la suite de ma carrière.

Je remercie également **Jérôme Rabaste**, Ingénieur DGA, et **Stéphane Vauchamp**, Ingénieur de recherche au CEA de Gramat, pour être venu assister à ma soutenance de thèse.

Dans le cadre de cette thèse, j'ai côtoyé de nombreuses personnes à l'IETR que je tiens à remercier. Je pense particulièrement aux nombreux doctorants et post-doctorants qui ont contribué à rendre ces trois années très sympathiques. Je pense ainsi à **Hamzeh**, mon premier

voisin de bureau, **Georges** pour sa bonne humeur, **Abdou** pour son soutien et **Sofiane** pour nos nombreux fous-rires. Je pense aussi à **Pape** (merci pour la vidéo de la soutenance), **Cheikh**, **Zakaria**, **Jérôme**, **Lamjed**, **Benoit**, **Simon**, **Yvan**, **Andries**, **Tony**, **Thierry** et **Jessen**.

Je souhaite également remercier l'ensemble des membres du laboratoire, dont le soutien a été primordial pour mener à bien ce travail de thèse. Je remercie particulièrement **Pascal**, **Yolande** (à qui je souhaite un bon rétablissement), **Katell** et **Aurore** pour leur sympathie et leur aide.

Je remercie les enseignants-chercheurs de l'INSA pour nos échanges, je pense notamment à **Renaud Loison**, **Christophe Lemoine** et **Erwan Fourn**.

Je souhaite également rendre hommage à l'ensemble du personnel du CEA de Gramat, et plus particulièrement aux membres du laboratoire LEHI et du bâtiment PRD pour m'avoir accueilli pendant une année. Je remercie **Philippe** (pour les simulations GORF), **Alain** (pour l'initiation au tir), **Clovis** (pour les soirées Champions league), **Alexandre**, **Nicolas**, **Justine**, **Fabien**, **Jean-Christophe**, **Quentin**. Je salue également les joueurs de foot en salle du mardi soir.

Je remercie très chaleureusement **Yannick Baraud** et **Patricia Reynaud-Bouret**, enseignants-chercheurs en statistiques à l'Université des Sciences de Nice Sophia-Antipolis. Je les remercie pour m'avoir orienté vers cette voie, ainsi que leur aide les fois où je les ai sollicité. Je remercie également mes encadrantes de stage de Master 2, **Christine Malot** et **Kim-Anh Lê Cao**, qui m'ont encouragé à effectuer une thèse après mon stage. J'ai également une grande pensée pour certains enseignants-chercheurs qui m'ont aidé, **Francis Avnaim** et **Bruno Vallette**.

Un grand merci à mes amis de Nice qui vivent à Paris. Je pense particulièrement à **Anis** (et sa petite princesse **Lina**), **Mehdi** (merci pour la visite au gouffre de Padirac), et **Anwar** (et sa petite perle **Inès**). Je remercie également **Mohamed** (notre expert en Optimisation) et **Marouane**, notre agent immobilier (et mécanicien à ses heures perdues). Je les remercie pour leur soutien et pour les beaux moments passés ensemble. Malgré la distance, on réussit à entretenir nos liens d'amitié, et je m'en réjouis particulièrement. J'ai également une pensée pour mon ami **Doom's**.

J'adresse mes remerciements à mes amis de Nice, **Hatem** (pour ses avis pertinents), **Mansour** (pour nos ballades nocturnes), **Aziz** (pour nos fous-rires) et **Hosni** (le meilleur cuistot du groupe!). J'ai également une pensée pour **Fayçal** (mon grand ami), **Peral**, **Betty** et **Mamou**. Je salue également mon ami **Fefe** pour le périple en tuk-tuk à Bangkok. Je les remercie également pour les moments partagés ensemble lors de mes vacances à Nice, et qui me permettent toujours de recharger les batteries. Je transmets également mes amitiés à mon ami **Sofien**, pour m'avoir accueilli à Dubaï (tu es le plus grand globe-trotter de Nice!). Une spéciale dédicace à toute l'équipe avec laquelle j'ai passé le réveillon de 2015 au ski (**Chaouki**, **Khaled**, **Wisseem**, **Berry...**). Je souhaite également un bon rétablissement à **Leila**, la soeur de mon ami **Hatem**.

Enfin, ces dernières lignes s'adressent à toute ma famille, à qui je dédie cette thèse. Merci à mon père et à ma mère pour tout ce qu'ils m'ont offert, et pour m'avoir encouragé à suivre ma voie. Merci à mon grand frère **Saber** (un exemple pour moi!), et à mon petit frère **Karim**. Merci à mes soeurs **Rabia** et **Soulef** pour leur soutien. Je remercie également mes oncles **Amar**, **Hamed**, **Sadok**, **Mohdine**, mes cousins **Issam**, **Sliman**, **Hicham**, **Moez** et **Hakim**. *A special thanks to my cousin Samia, and her little son Noor*. Enfin, je souhaite finir par remercier ma chère cousine **Besma**, qui a toujours été présente pour moi (merci d'être venue à ma soutenance!).

Liste des acronymes et des abréviations

AS	analyse de sensibilité
CDF	fonction de distribution cumulative (cumulative distribution function)
CEA	Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives
CEM	compatibilité électromagnétique
CP	chaos polynomial
CRBM	chambre réverbérante à brassage de modes
CS	collocation stochastique
DAS	débit d'absorption spécifique
EE	estimation empirique
EM	électromagnétique
FORM	first-order-reliability-method
HF	high frequency
IEMI	interférences électromagnétiques intentionnelles
IS	importance sampling
MCMC	Monte Carlo par chaînes de Markov
MC	Monte Carlo
MH	Metropolis-Hastings
PDF	fonction de densité de probabilité (probability distribution function)
RF	radiofréquence
SCA	stratification contrôlée adaptative
SC	stratification contrôlée
SORM	second-order-reliability-method
SS	subset simulation
TLT	théorie des lignes de transmission

Sommaire

1	Introduction	1
I	Traitement des incertitudes en CEM : éléments de contexte	5
2	Contexte et motivations	7
2.1	La CEM	7
2.1.1	Définition de la CEM	7
2.1.2	La conception en CEM	8
2.1.3	Impact des incertitudes en CEM	8
2.2	Activités du CEA	10
2.3	Méthodologie globale du traitement d'incertitudes	12
2.3.1	Types d'incertitude	12
2.3.2	Modéliser une variable aléatoire à partir d'un avis d'expert	13
2.3.3	Modéliser une variable aléatoire à partir d'observations	14
2.3.4	Analyse et propagation d'incertitudes	15
2.4	Conclusion	15
	Références	17
3	Etat de l'art	19
3.1	Outils statistiques traitant de l'aléa pour le calcul des interférences électromagnétiques	19
3.1.1	Introduction	19
3.1.2	Méthode de simulation de Monte Carlo (MC)	19
3.1.3	Collocation stochastique (CS)	20
3.1.3.1	Introduction	20
3.1.3.2	Principe de la méthode de CS	21
3.1.4	<i>Chaos polynomial</i> (CP)	23
3.1.4.1	Développement par CP de la réponse d'un modèle	23
3.1.4.1.a	Exemple de construction de base du CP	24
3.1.4.2	Calcul des coefficients de la base du CP	25
3.1.4.2.a	Approches par projection	25
3.1.4.2.b	Approches par régression	26
3.1.4.3	Post-traitements des coefficients de la base du CP	27
3.1.5	Krigeage	27
3.1.6	Quelques applications traitant des incertitudes en CEM	28
3.2	Outils statistiques traitant de l'aléa en sciences de l'ingénieur	29
3.2.1	Analyse de sensibilité globale par les indices de Sobol	29
3.2.2	Actualisation bayésienne des paramètres d'entrée	31
3.2.2.1	Introduction	31
3.2.2.2	Énoncé du problème	32
3.2.2.3	Méthodes d'actualisation par simulation de MC	33
3.2.2.3.a	Chaînes de Markov	33

3.2.2.3.b	Algorithmes de Metropolis-Hastings (MH)	34
3.2.2.3.c	Actualisation de modèles par résolution du problème inverse	36
3.2.2.3.d	Conclusion	37
3.2.3	Méthodes de fiabilité	37
3.2.4	Estimation de quantile par stratification contrôlée (SC)	38
3.3	Positionnement de la thèse	39
Références		41

II Analyse de risque d'interférence électromagnétique 45

4	Probabilité de défaillance et analyse de sensibilité par méthodes de fiabilité appliquées au calcul d'interférences électromagnétiques extrêmes	47
4.1	Introduction	47
4.2	Méthodes pour l'analyse de fiabilité	48
4.2.1	Fonction d'état-limite	48
4.2.2	Transformation de l'espace des variables d'entrée et définition du point de conception	48
4.2.3	Algorithme de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HLRF)	49
4.2.4	Estimation de la probabilité de défaillance à partir du point de conception	52
4.2.4.1	Principe des approximations FORM et SORM	52
4.2.4.2	Importance sampling (IS)	54
4.2.5	Analyse de sensibilité locale	54
4.2.5.1	Sensibilité de l'indice de fiabilité par rapport aux variables	55
4.2.5.2	Sensibilité de l'indice de fiabilité aux paramètres des distributions de probabilité	56
4.2.6	Estimation de la probabilité de défaillance en grandes dimensions : <i>subset simulation</i> (SS)	56
4.3	Estimation et analyse de sensibilité de la probabilité de défaillance dans un problème de diaphonie	57
4.3.1	Analyse préliminaire des performances de la méthode FORM	58
4.3.1.1	Illustration de la méthode FORM sur un cas d'étude simplifié	58
4.3.1.2	Illustration de la méthode FORM sur le cas d'étude initial	61
4.3.2	Susceptibilité d'un équipement électronique connecté à l'extrémité du câble $n^{\circ}2$	62
4.3.2.1	Intégration de la défaillance d'un équipement électronique dans le cas d'étude	62
4.3.2.2	Estimation de la probabilité de défaillance d'un système CEM	64
4.3.2.3	Sensibilité de la probabilité de défaillance $P_{f,\text{sys}}$ du système CEM	65
4.4	Conclusion	68
Références		69
5	La méthode de stratification contrôlée appliquée à la détermination d'interférences électromagnétiques extrêmes avec des variables d'entrée incertaines	71
5.1	Introduction	71
5.2	Stratification contrôlée (SC)	72
5.2.1	Présentation de la méthode de SC	72
5.2.1.1	Estimation empirique (EE) de quantile	72
5.2.1.2	Estimation de quantile par variable de contrôle (VC)	73
5.2.1.3	Estimation de quantile par SC	75
5.2.1.4	Estimation de quantile par stratification contrôlée adaptative (SCA)	77

5.2.2	Discussion autour du choix d'un bon modèle simple	77
5.3	Cas d'étude	78
5.4	Application au cas d'une simulation directe des équations de Maxwell avec un modèle de ligne de transmission comme modèle simple pour la méthode de SC	80
5.4.1	Estimation de quantile extrême de courant	80
5.4.1.1	Estimation de la corrélation entre les modèles simple et rigoureux	80
5.4.1.2	Stratégies de répartition des réalisations pour l'estimation de quantile	81
5.4.1.2.a	Répartition uniforme	81
5.4.1.2.b	Importance de la répartition	83
5.4.1.2.c	Approche par SCA	84
5.5	Application au cas d'une simulation « full-wave » avec une autre simulation « full-wave » utilisant un maillage grossier comme modèle simple pour la technique de SC	85
5.5.1	Estimation de quantile extrême de courant	86
5.5.1.1	Evaluation de la corrélation entre les modèles simple et rigoureux	86
5.5.1.2	Estimation de quantile par SC et SCA	86
5.5.1.3	Discussion autour des performances des deux modèles simples	89
5.5.1.4	Distribution de valeurs extrêmes	89
5.6	Conclusion	90
	Références	92

III Cas d'application 95

6	Traitement d'incertitudes sur un problème de couplage onde EM-câble de transport d'électricité aérien	97
6.1	Introduction	97
6.2	Présentation du problème	98
6.3	Analyse de sensibilité globale et application des méthodes fiabilistes sur le problème de couplage onde EM-câble	100
6.3.1	Sol rocailleux	100
6.3.1.1	Analyse de sensibilité globale	100
6.3.1.2	Estimation d'une probabilité de défaillance P_f	102
6.3.1.2.a	Estimation de P_f sur le domaine total de variation de l'angle d'azimut de l'onde EM	102
6.3.1.2.b	Estimation de P_f par quadrant d'angle d'azimut de l'onde EM	103
6.3.2	Sol en terre	107
6.3.2.1	Analyse de sensibilité globale	107
6.3.2.2	Estimation d'une probabilité de défaillance P_f par quadrant d'angle d'azimut de l'onde EM	109
6.3.3	Conclusion sur les méthodes fiabilistes	111
6.4	Application de la méthode de stratification contrôlée (SC) au problème de couplage onde EM-câble	113
6.4.1	Introduction	113
6.4.2	Présentation des modèles simple et rigoureux	113
6.4.3	Sol rocailleux : estimation de quantile extrême de courant	114
6.4.3.1	Estimation de la corrélation entre les modèles simple et rigoureux	114
6.4.3.2	Approche par SC	116
6.4.4	Sol en terre : estimation de quantile extrême de courant	119
6.4.4.1	Estimation de la corrélation entre les modèles simple et rigoureux	119
6.4.4.2	Estimation par SC	121
6.4.5	Conclusion sur la méthode de SC	124
6.5	Conclusion	124

Références	126
IV Bilan et perspectives	127
7 Conclusion générale et perspectives	129
7.1 Conclusion générale	129
7.2 Perspectives	131
Références	132
Publications	133
Annexes	137
A Inférence statistique classique	139
A.1 Méthode des moments	139
A.2 Méthode du maximum de vraisemblance	140
B Inférence statistique bayésienne	141
B.1 Exemple (Laplace, 1773 [1])	141
C Lois de probabilité usuelles	143
C.1 Loi gaussienne	143
C.2 Loi uniforme	143
Références	144
Liste des figures	145
Liste des tableaux	149

CHAPITRE 1

Introduction

L'objet de ces travaux de thèse concerne essentiellement le domaine de la propagation des incertitudes relatives aux paramètres d'entrée sur les observations effectuées en sortie au moyen de modèles de calcul électromagnétique. Les applications concernées visent le domaine très général de la CEM et en particulier le domaine des interférences électromagnétiques intentionnelles (IEMI). L'objectif visé consiste à évaluer en termes probabilistes des niveaux d'interférences extrêmes dans le cadre de la conception d'un système comportant de nombreux paramètres d'entrée incertains (par nature ou en l'absence de préconisations). Plus concrètement, ce type d'évaluation probabiliste devra mener à la détermination d'un quantile particulier des observations de sorties ou à l'évaluation du risque de dépassement d'un seuil de susceptibilité (i.e. état de défaillance). Au-delà, cette approche, au moyen d'analyses de sensibilité, visera à élaborer des stratégies de conception de systèmes « sûrs ».

Deux familles de méthodes ont été identifiées comme pertinentes dans le cadre des applications visées. La première famille de méthodes est celle des méthodes fiabilistes. Elles ont trait à la recherche de probabilité de dépassement d'un seuil, considéré comme seuil de risque pour le système en s'appuyant sur un nombre limité d'appels au modèle de calcul. Le recours à ces différentes méthodes peut permettre d'approcher raisonnablement ce seuil de risque dans des situations assez typiques de CEM et plus particulièrement d'IEMI.

La seconde famille de méthodes pourrait s'avérer encore plus riche dans le cadre de la résolution de problèmes de CEM ou d'IEMI. Il s'agit de la méthode dite de stratification contrôlée. Elle consiste à estimer le quantile extrême d'une observation issue du modèle initial à partir de l'utilisation d'un modèle plus grossier (et donc en général bien moins coûteux en temps de calcul).

Ce manuscrit présente ainsi les aspects théoriques et pratiques de ce travail de thèse. Il est organisé en cinq chapitres en dehors du chapitre introductif et de la conclusion.

- Le chapitre 2 de ce document rappelle les éléments de contexte de la CEM. Nous revenons dans ce chapitre sur les différentes techniques de mesure d'émission et de susceptibilité utilisées lors des campagnes d'essais CEM d'un équipement électronique. Nous évoquons ensuite, la nécessité d'anticiper ces différentes phases de tests et l'importance de la

prise en compte des incertitudes durant la phase initiale de conception. Nous resituons ensuite nos travaux dans le contexte du CEA dont nous introduisons rapidement les activités. Après avoir présenté la méthodologie globale du traitement des incertitudes, nous terminons ce chapitre en évoquant la démarche à adopter pour l'analyse et la propagation des incertitudes à travers un modèle numérique reproduisant un phénomène d'intérêt.

- Dans le chapitre 3, nous présentons l'état de l'art des principales techniques statistiques permettant de traiter des incertitudes associées à des paramètres d'entrée d'un problème. Nous recensons dans ce chapitre les travaux effectués en CEM, puis dans les sciences de l'ingénieur. La première partie du chapitre établit un inventaire structuré des principales méthodes utilisées jusqu'à présent en CEM. Ces travaux ont permis d'étudier différentes applications de bio-CEM et de CEM. Cependant, hormis quelques travaux récents, il semble que la communauté CEM ne se soit pas encore penchée de manière significative sur l'étude de perturbations électromagnétiques *extrêmes*. De ce fait, nous effectuons dans la deuxième partie du chapitre, un état de l'art des outils traitant de l'aléa dans les sciences de l'ingénieur. Dans cet état de l'art, nous identifions des approches potentiellement intéressantes telles que les méthodes fiabilistes et la technique de stratification contrôlée, qui pourraient s'inscrire dans le cadre de l'analyse d'événements extrêmes de CEM. Enfin, nous dressons une synthèse rappelant les principaux avantages et inconvénients des différentes techniques présentées dans ce chapitre.
- Le chapitre 4 est dédié à l'analyse de risque d'un défaut CEM. La première partie du chapitre détaille les éléments théoriques des méthodes fiabilistes (issues de la mécanique des structures). La seconde partie propose la mise en oeuvre de ces techniques sur un cas d'étude canonique de CEM dans l'hypothèse d'application de la théorie des lignes de transmission. Une estimation d'une probabilité de défaillance d'un système CEM comprenant des paramètres d'entrée incertains (e.g. impédances, position des câbles...) est établie. Dans cette étude, la probabilité de défaillance du système CEM est définie comme la probabilité que le courant induit par diaphonie engendre un dysfonctionnement d'un appareil électronique connecté à l'extrémité d'un câble. Une analyse de sensibilité de cette probabilité de défaillance est également effectuée, et montre qu'une préconisation plus restrictive sur certains paramètres d'entrée peut permettre à un concepteur CEM de proposer des stratégies de systèmes plus fiables. Par ailleurs, l'avantage de ce type de méthodes est d'estimer une probabilité de défaillance en réduisant le coût de calcul par rapport à une méthode de simulation de type Monte Carlo.
- Le chapitre 5 quant à lui, décrit la méthode de stratification contrôlée, qui est une approche complémentaire aux méthodes de fiabilité pour l'analyse d'événements rares en CEM. Cette technique est consacrée à l'estimation de valeurs extrêmes, dans le contexte de simulations coûteuses basées sur une modélisation rigoureuse, incluant des paramètres d'entrée incertains. Il s'agit d'une technique de réduction de variance pour accélérer l'estimation d'un quantile extrême de la distribution d'un observable issu d'un modèle rigoureux. L'approche repose sur l'utilisation d'un modèle simple (ayant un coût de

calcul relativement faible) permettant d'identifier des réalisations d'entrée pertinentes par l'intermédiaire de strates partitionnant l'espace de la sortie du modèle. Une fois que ces réalisations ont été identifiées, elles sont utilisées pour effectuer des simulations via le modèle complexe, et ainsi estimer un quantile extrême de ce dernier. La méthode est appliquée pour l'étude d'un cas simple de câblage afin d'estimer un niveau de quantile extrême d'un courant interférent. Nous montrons que les valeurs extrêmes sont obtenues à un coût de calcul réduit par rapport à une estimation de quantile empirique classique.

- Le chapitre 6 est consacré à la mise en oeuvre pratique des méthodes fiabilistes et de la technique de stratification contrôlée sur un cas d'IEMI. Plus précisément, nous nous intéressons dans cette partie, à un câble de transport d'électricité illuminé par une onde plane électromagnétique (EM), en considérant des paramètres d'entrée incertains tels que, les angles d'incidence et de polarisation associés à l'onde EM, la forme d'onde et les paramètres géométriques du câble. L'observation porte sur le courant de court-circuit en extrémité de câble. L'objet de ce problème de couplage consiste d'une part, à quantifier la probabilité d'occurrence d'événements d'interférences extrêmes. D'autre part, nous souhaitons identifier et hiérarchiser l'effet des variables aléatoires d'entrée sur ces niveaux d'interférences extrêmes. Dans ce cas test, les deux familles de méthodes sont appliquées pour l'étude d'une ligne au-dessus d'un sol rocailleux (i.e. $\sigma = 10^{-3}$ S/m), et au-dessus d'un sol en terre (i.e. $\sigma = 5 \times 10^{-2}$ S/m). Les résultats obtenus sont discutés et confrontés en fonction de la nature du sol. Enfin, les principaux avantages et inconvénients présentés par les deux types de techniques dans cette étude, sont donnés sous la forme d'une conclusion.

Première partie

Traitement des incertitudes en CEM : éléments de contexte

Contexte et motivations

2.1 La CEM

2.1.1 Définition de la CEM

Depuis quelques dizaines d'années, les équipements électroniques sont de plus en plus présents dans notre quotidien (ordinateurs, automobiles, téléphones, etc.). Ces équipements sont à l'origine de rayonnements électromagnétiques utiles (communications RF) ou non intentionnels, contribuant à la modification de notre environnement électromagnétique. Ils doivent de même fonctionner correctement au sein de cet environnement. Ces perturbations potentielles, qui peuvent également provenir de courants électriques parasites, doivent donc être évitées. Pour cette raison, un équipement électronique doit être testé avant sa mise en circulation sur le marché et sa conformité doit être établie vis-à-vis d'un cahier des charges (qui repose essentiellement sur des normes de CEM).

La CEM est ainsi définie, par l'aptitude d'un dispositif, d'un appareil ou d'un système à fonctionner de façon satisfaisante dans son environnement électromagnétique, sans produire lui-même des perturbations électromagnétiques intolérables pour d'autres appareils ou systèmes. Cependant, la complexité des environnements électromagnétiques et des équipements électroniques nécessite lors des essais CEM d'effectuer des simplifications. Les techniques de mesure effectuées en laboratoire, sont alors divisées en 2 catégories essentielles : *émission* et *susceptibilité* (immunité). On distingue ensuite les modes de propagation des signaux perturbateurs : *conduction* et *rayonnement*. Les techniques de mesure se résument alors en 4 types :

- les techniques de mesure des perturbations *émises* par *conduction* ;
- les techniques de mesure des perturbations *émises* par *rayonnement* ;
- les techniques de mesure de la *susceptibilité* des équipements aux perturbations *conduites* ;
- les techniques de mesure de la *susceptibilité* des équipements aux perturbations *rayonnées*.

Dans le contexte de l'étude de la susceptibilité, il faut également intégrer la problématique liée aux interférences électromagnétiques intentionnelles (IEMI).

Pour la réalisation des essais, la communauté CEM s'appuie régulièrement sur les chambres anéchoïques et les chambres réverbérantes à brassage de modes (CRBM). Ces moyens d'essai sont des cages de Faraday qui isolent l'objet sous test de l'environnement électromagnétique extérieur. Les chambres anéchoïques permettent de tester les équipements dans un environnement où l'absence de réflexion des ondes électromagnétiques sur les parois est recherchée via l'introduction de matériaux absorbant les ondes électromagnétiques. D'autre part, les CRBM sont équipées de parois métalliques (acier, aluminium) permettant au contraire de réfléchir les ondes électromagnétiques à l'intérieur de la cavité.

Cependant, compte tenu de la complexité des architectures électriques et électroniques à concevoir, il est particulièrement important d'anticiper avec soin ces étapes de tests de conformité CEM afin de les passer avec succès. Pour cela, la phase de conception du produit est devenue primordiale. Cette étape est présentée dans la section suivante.

2.1.2 La conception en CEM

De nos jours, la conception en CEM est un savoir-faire stratégique dans les secteurs industriels comme l'automobile ou l'aéronautique. Dans ces secteurs d'activités, la communauté CEM est à la recherche de techniques efficaces, plus fiables et plus économiques. En s'appuyant sur l'élaboration du cahier des charges, les concepteurs doivent identifier les risques potentiels de dysfonctionnement (susceptibilité) ou de dépassement de gabarit (émissivité).

Le recensement de ces risques s'appuie sur le cahier des charges qui liste les performances que le dispositif doit vérifier, ainsi que sur l'analyse des risques d'auto-perturbations internes au dispositif. Ce recensement est le fruit de l'expertise et de la capitalisation des projets de développement passés. Un risque CEM se traduit par un schéma du type Source-Couplage-Victime. Cela nécessite une connaissance la plus précise possible de la nature de la source, du niveau de susceptibilité de la victime et de la quantification du couplage. Les deux premières conditions sont nécessaires pour évaluer un scénario CEM, tandis que la quantification du couplage peut s'appuyer sur un calcul analytique, des codes de calcul ou une approche expérimentale. À l'issue de l'étude quantitative du scénario CEM, les informations obtenues permettent au concepteur de faire évoluer l'architecture électrique/électronique du « dispositif » si nécessaire, ou de décider de l'ajout de dispositifs de protection (blindage, filtrage).

Les évaluations actuelles reposent très majoritairement sur une analyse déterministe de ces différents scénarios en recourant de plus en plus systématiquement à la simulation électrique/-électronique. Toutefois, la modélisation déterministe présente certaines difficultés pour évaluer les risques de défaut de systèmes, en raison de la dispersion des valeurs possibles prises par certains paramètres (relative au système et/ou à l'environnement EM). La méconnaissance de l'impact de ces incertitudes conduit alors potentiellement, à prendre des marges de conception importantes entraînant des surcoûts liés au processus de fabrication. Il est donc devenu nécessaire de considérer l'effet des incertitudes en CEM. Ceci est l'objet de la section suivante.

2.1.3 Impact des incertitudes en CEM

Depuis quelques années, de nombreuses démarches statistiques ont été introduites en CEM. Un intérêt particulier est porté à ces outils en raison de la complexité des phénomènes physiques observés et des nombreuses variables conditionnant les calculs d'interférence électromagnétique. La modélisation de ces niveaux d'interférence est difficilement concevable de manière entièrement déterministe ou sous forme d'études paramétriques exhaustives compte tenu des

coûts de calcul. Par contre, ils peuvent être plus naturellement décrits sous la forme d'une statistique.

En effet, les modèles de simulation numérique utilisés pour la prédiction d'une interférence ne donnent des résultats acceptables que si les paramètres d'entrée qu'on leur fournit sont parfaitement connus. Cependant, certaines structures étudiées en CEM sont décrites par des facteurs inconnus ou parfois mal définis. Un exemple typique pour illustrer ces limites peut être donné par un toron dans un avion dont la position relative des câbles est inconnue car non contrôlable (Fig. 2.1). Une certaine variabilité de cette structure existe donc entre deux avions de modèle identique : trajet imparfaitement défini, position des câbles...

De plus, les impédances d'extrémité présentées par les équipements connectés en bout de ligne peuvent être vaguement connues. Le manque de connaissance sur ces paramètres d'entrée peut entraîner une mauvaise prédiction des niveaux d'interférence et des risques de défauts.

Pour les raisons évoquées, la prise en compte des incertitudes impactant les niveaux d'interférences de systèmes est étudiée par de plus en plus d'organismes de recherche. Parmi ces acteurs, on peut citer par exemple le CEA/Gramat, l'institut Pascal, l'institut Xlim, le Département d'Électronique de Politecnico di Torino et, dans le cadre des travaux objet de ce manuscrit, l'IETR. Ainsi, cette thèse est le fruit d'une collaboration entre l'IETR et le CEA/Gramat. Nous présentons alors brièvement les activités de ce dernier dans la section suivante, avant d'introduire la méthodologie globale du traitement des incertitudes.



FIGURE 2.1 – Photo d'un faisceau de câbles à l'intérieur d'un A380 [1].

2.2 Activités du CEA

Le Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives (CEA) est un organisme public de recherche scientifique français qui emploie environ seize mille salariés à travers dix centres d'études répartis dans toute la France (Fig. 2.2).

Il s'agit d'un acteur majeur de la recherche, du développement et de l'innovation qui intervient dans quatre grands domaines :

- les énergies « bas carbone »,
- les technologies pour l'information et les technologies pour la santé,
- les Très Grandes Infrastructures de Recherche (TGIR),
- la défense et la sécurité globale.

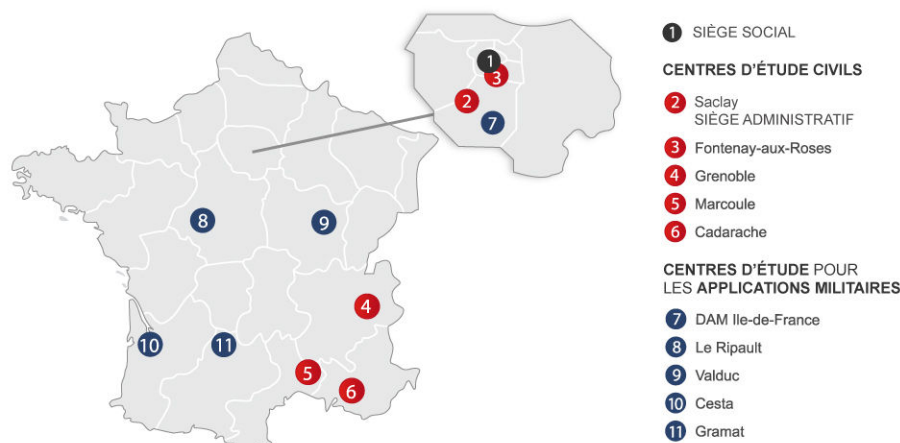


FIGURE 2.2 – Carte des différents centres CEA en France.

Pour chacun de ces quatre grands domaines, le CEA s'appuie sur une recherche fondamentale d'excellence et assure un rôle de soutien à l'industrie par un transfert actif de l'innovation.

Reconnu comme un expert dans ses domaines de compétences, le CEA est pleinement inséré dans l'espace européen de la recherche et exerce une présence croissante au niveau international. Ses activités de recherche se répartissent au sein de plusieurs pôles opérationnels :

- Direction des Sciences du Vivant (DSV),
- Direction des Sciences de la Matière (DSM),
- Direction de la Recherche Technologique (DRT),
- Direction de l'Énergie Nucléaire (DEN).
- Direction des Applications Militaires (DAM).

Le CEA/Gramat (situé dans le département du Lot) est quant à lui, lié à la DAM. Il s'agit du centre de référence pour la Défense en matière de *vulnérabilité des systèmes d'armes aux agressions mécaniques ou électromagnétiques et d'efficacité des armements*. Les études qui y sont menées contribuent à répondre aux besoins de l'État en nucléaire de Défense, en Défense conventionnelle et en sécurité globale.

Nucléaire de Défense

La contribution au nucléaire de Défense consiste à évaluer la vulnérabilité et les besoins de durcissement (protection), des systèmes aux effets des armes nucléaires (e.g. évaluation de l'effet d'une impulsion électromagnétique d'origine nucléaire (IEMN, voir Fig. 2.3), effet mécanique des armes...). Le CEA/Gramat possède un ensemble de moyens de simulation numérique et d'installations expérimentales pour évaluer la vulnérabilité des armes aux agressions mécaniques, électromagnétiques et thermiques.

Défense conventionnelle

La défense conventionnelle porte sur la vulnérabilité et le durcissement des systèmes d'armes vis-à-vis des agressions électromagnétiques. Ces dernières ont pour but de faire échouer la mission d'un système générant une perturbation irrécupérable de ses fonctions électroniques voire en détruisant physiquement ses composants. Elle concerne aussi la vulnérabilité des systèmes aux effets des armes conventionnelles ainsi que leurs efficacités. Divers travaux ont été menés sur l'efficacité des armes anti-infrastructures, sur la défense anti-missile balistique ou encore sur la vulnérabilité des aéronefs (voir Fig. 2.4).



FIGURE 2.3 – Générateur capable de reproduire l'IEMN à échelle réelle sur des systèmes.

Sécurité globale

Le CEA/Gramat travaille sur l'évaluation de la vulnérabilité et sur la protection des systèmes complexes, des infrastructures critiques (exemple : vulnérabilité d'un tunnel autoroutier) et des systèmes de transport. Les outils de simulation développés pour les besoins de Défense permettent d'analyser les vulnérabilités de systèmes civils et/ou de juger de l'opportunité de technologies contribuant à leur protection.

Au travers des études menées par le CEA/Gramat, il apparaît que les analyses sont dépendantes d'un nombre important de paramètres incertains relatifs aux agressions EM (e.g. direction de l'onde incidente). De ce fait, la nécessité de décrire les incertitudes dans une

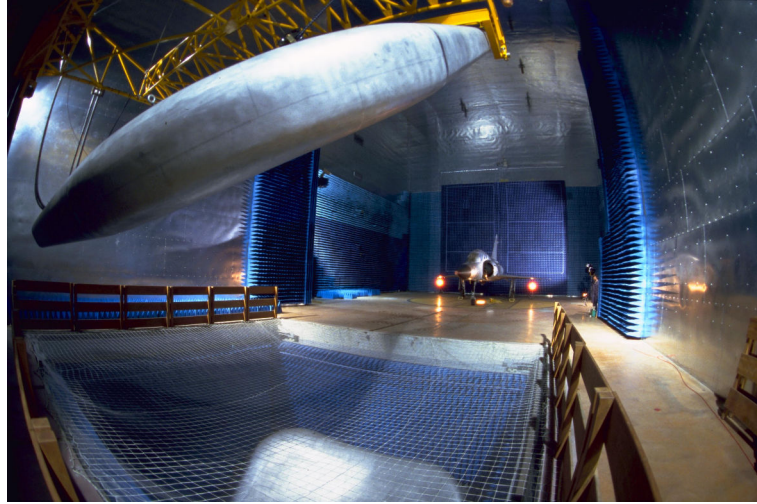


FIGURE 2.4 – Chambre anéchoïque pour l’étude de la vulnérabilité aux micro-ondes de forte puissance.

démarche adaptée et d’étudier leur propagation à travers des moyens de simulations EM est devenue incontournable en recherche CEM. La méthodologie globale du traitement d’incertitudes est alors introduite dans la section suivante.

2.3 Méthodologie globale du traitement d’incertitudes

La prise en compte de l’incertain dans la modélisation d’un problème physique se fait par un ensemble d’outils statistiques et de méthodes probabilistes qui permettent dans un premier temps de quantifier les sources d’incertitude relatives au problème, puis dans un second temps de propager ces incertitudes à travers un modèle numérique.

L’objectif de cette section est d’introduire un ensemble de techniques couramment utilisées en modélisation statistique et probabiliste. Une définition des sources d’incertitude est d’abord introduite, suivie de différentes méthodes de modélisation de l’aléa, prenant en compte les différentes sources d’information (e.g. avis d’expert, observations numériques, etc.).

2.3.1 Types d’incertitude

Un modèle mathématique est une représentation abstraite et simplifiée d’un phénomène physique sous forme d’équations liant des paramètres d’entrée. La conception d’un modèle \mathcal{M} nécessite, dans un premier de temps, d’*identifier* tous les paramètres intervenant en entrée du modèle. De manière systématique, l’identification de paramètres d’un modèle s’effectue à partir d’observations. Lors de la modélisation, une valeur, i.e. *la mesure* sera attribuée à chaque observation. En général, chaque mesure est liée à une *incertitude* provenant essentiellement du dispositif expérimental. Essentiellement, deux types de sources d’incertitude peuvent être associée à l’incertitude de mesure :

- le comportement aléatoire du phénomène physique observé et vérifié expérimentalement mène à une dispersion statistique plus ou moins importante des mesures. Par exemple, la valeur du niveau d'interférence entraînant un défaut CEM sur un composant électronique est considéré comme intrinsèquement aléatoire ;
- l'incertitude épistémique correspondant au manque de connaissance du phénomène physique d'intérêt.

Dans beaucoup de cas, il est difficile d'établir une distinction claire entre l'incertitude épistémique et aléatoire puisque les deux types d'incertitude peuvent être confondus au sein du même système. En pratique, aucune distinction n'est en générale faite entre ces deux catégories. Lorsque l'incertitude de certains paramètres d'entrée est identifiée, un modèle probabiliste de celui-ci est construit.

Cependant, il est important de distinguer le banc d'expérimentation réalisé en phase de conception et le comportement d'un système réel existant. Par exemple, pour un système électromagnétique simple comme un faisceau de câbles, les données expérimentales disponibles à partir des mesures sont souvent suffisantes pour identifier l'aléa du paramètre du modèle. Par contre, lorsque l'on s'intéresse au système réel, qui est beaucoup plus complexe, la modélisation numérique peut être difficile. Il peut aussi arriver que pour un système complexe, peu de données soient disponibles. Dans ce cas et en vue d'assurer le bon fonctionnement du système étudié, un avis d'expert ou des informations peuvent être intégrées aux données expérimentales dans un processus d'actualisation des modèles numériques (voir section 3.2.2).

2.3.2 Modéliser une variable aléatoire à partir d'un avis d'expert

Modéliser le contenu probabiliste d'un paramètre peut être difficile lorsqu'aucune ou peu d'information sont disponibles. Le modèle peut être choisi par un *avis d'expert*. Dans ce cas, des informations disponibles à partir d'expertises ou d'études permettent de compléter des données objectives.

Le *principe de maximum d'entropie* (PME) [2] permet de déterminer la loi de probabilité d'un paramètre donné à partir d'une information subjective sur ce paramètre sans faire d'hypothèses supplémentaires. Le principe est le suivant : pour une variable aléatoire continue $X : \Omega \rightarrow \mathcal{D}_X \subset \mathbb{R}$, la densité de probabilité f_X caractérisant le mieux l'information connue est celle qui maximise l'entropie H au sens de Shannon :

$$H = - \int_{\mathcal{D}_X} f_X(x) \log f_X(x) dx \quad (2.1)$$

L'objectif du PME est de maximiser H en s'appuyant sur des informations disponibles pour X (e.g. bornes, moments statistiques, etc.). Ces informations s'écrivent sous forme de contraintes :

$$\mathbb{E}[c_j(X)] = \eta_j, \quad j \in \{1, \dots, n\} \quad (2.2)$$

où c_j est la fonction pour laquelle η_j est un moment d'ordre j , et en ajoutant la propriété d'une densité de probabilité :

$$\int_{\mathcal{D}_X} f_X(x) dx = 1 \quad (2.3)$$

vraie quelle que soit la loi support de X . La densité de probabilité f_X qui maximise l'entropie est obtenue en résolvant le problème 2.1 sous les contraintes 2.2 et 2.3.

Ainsi, lorsqu'il s'agit de modéliser une connaissance approximative d'un phénomène par une distribution de probabilité, le PME nécessite :

- d'identifier les contraintes auxquelles cette distribution doit répondre ;
- de choisir parmi les distributions vérifiant ces contraintes celle ayant la plus grande entropie au sens de Shannon.

De toutes ces distributions, par définition de l'entropie, celle d'entropie maximale contient le moins d'information, et c'est pour cette raison qu'elle est la moins arbitraire parmi toutes celles que l'on pourrait utiliser. Le PME mène au choix de distribution suivante :

- uniforme si la plage des variations du paramètre étudié est bornée ;
- exponentielle si l'espérance du paramètre est connue et si sa plage de variation est bornée ou semi-bornée ;
- gaussienne si l'espérance et l'écart-type du paramètre sont connus et la plage de variation non bornée.

La distribution de probabilité obtenue peut ensuite être utilisée comme loi *a priori* dans un contexte d'inférence bayésienne (voir section 3.2.2).

2.3.3 Modéliser une variable aléatoire à partir d'observations

La statistique est l'ensemble des outils mathématiques permettant de déterminer les caractéristiques d'un ensemble de données. La statistique comprend [3] :

- la collecte des données ;
- le traitement des données collectées, aussi appelé *statistique descriptive* ;
- la *modélisation statistique des données*, aussi appelée *inférence statistique*, qui est basée sur la théorie des sondages et la statistique mathématique.

La modélisation statistique des données est une description probabiliste du mécanisme qui a généré les observations. L'approche statistique est une approche d'inversion permettant de remonter des effets (les observations) aux causes (le modèle probabiliste générateur). En pratique, on dispose en général d'un échantillon $\mathcal{X} = \{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}$ dont les points sont supposés être des réalisations de variables aléatoires X_k , $k = 1, \dots, n$ indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). On cherche alors à déterminer la loi de probabilité commune à ces variables. Il est possible de répondre à cette question par l'intermédiaire de différentes méthodes, regroupées en deux catégories : les méthodes statistiques *paramétriques* ou les méthodes statistiques *non paramétriques*. La modélisation statistique dans un contexte paramétrique identifie des paramètres de la loi de probabilité de X à partir d'un échantillon. Les principales étapes à la mise en oeuvre d'une telle démarche sont :

1. les outils des statistiques descriptives permettent de décrire un ensemble relativement important de données. Par exemple, l'espérance et l'écart-type sont calculés et des outils de visualisation tels que la boîte à moustaches et les histogrammes sont utilisés ;
2. une ou plusieurs familles de lois paramétriques $f_X(x; \theta)$ (e.g. Gaussienne, Weibull, etc.) susceptibles de modéliser l'échantillon ;
3. les paramètres regroupés dans le vecteur θ , vecteur des paramètres (espérance, écart-type... par exemple) sont estimés à partir de la méthode des moments (voir annexe A.1), du principe de maximum de vraisemblance (voir annexe A.2) ou d'une technique d'inférence bayésienne (voir annexe B).

D'autre part, la statistique non paramétrique, quant à elle, est l'ensemble des méthodes statistiques permettant d'extraire de l'information pertinente à partir des données, sans faire d'hypothèse que la loi de probabilité commune à ces observations appartienne à une famille paramétrée connue. Dans ce cas, les études statistiques ne se font plus sur les paramètres de lois de probabilité θ . Une méthode non paramétrique souvent utilisée est l'*estimation par noyau* qui permet d'estimer la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire en se basant sur un échantillon statistique [4].

Dans un contexte de statistique paramétrique ou non paramétrique, l'identification d'un modèle nécessite d'appliquer des tests statistiques pour vérifier et valider les hypothèses *a posteriori*.

2.3.4 Analyse et propagation d'incertitudes

L'analyse de l'effet des incertitudes des variables d'entrée sur la sortie d'un modèle, peut être illustrée par le schéma général représenté sur la figure 2.5 [4] :

- l'étape A consiste en la *définition du modèle numérique* utilisé pour représenter le système physique étudié, auquel on attribue éventuellement un critère de défaillance. Dans le cas d'un système complexe, il est nécessaire d'identifier les entrées et sorties de chaque sous-modèle utilisé. Cette étape correspond à une analyse déterministe classique ;
- l'étape B correspond à la *quantification des sources d'incertitude* en les modélisant dans un contexte probabiliste (incertitudes portant sur la longueur, la distance entre câbles par exemple). Cela se traduit par une identification des paramètres d'entrée du modèle numérique qui sont considérés comme incertains. On adopte dans ce manuscrit une description probabiliste des paramètres incertains, sous forme de variables ou vecteurs aléatoires ;
- l'étape C correspond à la *propagation des incertitudes* affectant les paramètres d'entrée à travers le modèle numérique. Il s'agit d'évaluer l'aléa de la réponse du système vis-à-vis du critère défini à l'étape A ;
- l'étape C' permet de quantifier l'impact relatif des variables aléatoires en entrée du modèle sur l'aléa de la réponse. Il s'agit d'une hiérarchisation des variables aléatoires d'entrée et de l'influence de celles-ci sur la réponse aléatoire du système, appelée *analyse de sensibilité*.

2.4 Conclusion

Le calcul des interférences électromagnétiques sur un système complexe à forte densité de composants électroniques et d'interconnexions est un défi majeur de la CEM depuis de nombreuses années. La modélisation déterministe, bien qu'ayant fait l'objet de progrès considérables, possède certaines limites qui la rendent difficilement utilisable en phase de conception des systèmes, là où elle devrait permettre l'évaluation des risques et la possibilité de prendre des mesures préventives. La grande diversité des paramètres ainsi que la dispersion des valeurs possibles sont à l'origine de ces difficultés. Ainsi, la description des incertitudes associées aux paramètres d'entrée, et l'étude de leur propagation au sein des modèles est d'une grande importance en CEM. L'emploi d'outils d'analyse d'incertitudes adaptés à ce domaine pourrait faire évoluer très fortement les méthodes de conception utilisées jusqu'à présent.

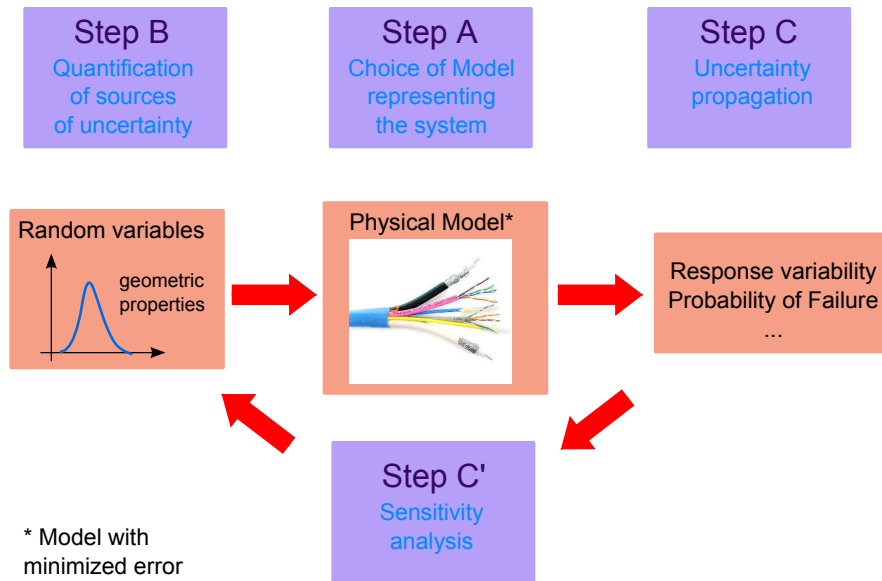


FIGURE 2.5 – Schéma général pour l'analyse d'incertitudes [4].

Nous présentons alors dans le chapitre suivant, des techniques statistiques permettant d'étudier l'effet d'incertitudes, et qui ont été introduites en CEM et dans les sciences de l'ingénieur.

Références

- [1] <http://www.safran-group.com>.
- [2] E.-T. Jaynes, “Information theory and statistical mechanics,” *Physical review*, vol. 106, no. 4, p. 620, 1957.
- [3] G. Saporta, *Probabilités, analyses des données et statistiques (2nd ed.)*. Editions Technip, 2006.
- [4] B. Sudret, *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models – Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*, Habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France, Oct. 2007.

3.1 Outils statistiques traitant de l'aléa pour le calcul des interférences électromagnétiques

3.1.1 Introduction

La prise en compte de l'incertain dans les problèmes de CEM est devenue un enjeu industriel car les systèmes étudiés sont de nature complexe au sens où tous les paramètres de conception ne peuvent être complètement déterminés. En effet, pour un système à forte densité d'électroniques et d'interconnexions, la modélisation déterministe possède certaines limites malgré les progrès considérables effectués depuis ces dernières années. Pour pallier ces limites, une approche statistique permettant d'estimer l'impact des différents aléas d'entrée sur l'observable de sortie semble pertinente.

Le but de cette section est de répertorier les principaux outils statistiques utilisés jusqu'à présent en CEM.

3.1.2 Méthode de simulation de Monte Carlo (MC)

Le principe de la méthode de simulation de Monte Carlo (MC), sous sa forme classique, est d'application générale et simple. Elle ne nécessite aucune préparation et mène à une économie de réflexion.

Soit \mathcal{M} un modèle mathématique (e.g. une fonction analytique, un code de calcul basé sur les éléments finis, etc.) décrivant un phénomène physique par exemple. La méthode de simulation de MC s'appuie sur la génération de réalisations des vecteurs d'entrée, soit un échantillon de taille n noté $\{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}\}$. Ces réalisations sont sélectionnées de manière aléatoire dans l'espace des paramètres d'entrée incertains dans le but d'évaluer la quantité d'intérêt (i.e. moments statistiques, probabilité de défaillance, densité de probabilité...) de l'observable $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$, où \mathbf{X} est un vecteur aléatoire.

Par exemple, la méthode de simulation de MC peut être utilisée pour estimer l'espérance et

l'écart-type de la quantité de réponse Y . Les estimateurs habituels de ces quantités s'écrivent :

$$\hat{\mu}_Y = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (3.1)$$

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left(\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(k)}) - \hat{\mu}_Y \right)^2 \quad (3.2)$$

Les statistiques calculées sur des échantillons sont en réalité des quantités aléatoires. En ingénierie probabiliste, il est souvent pratique de lancer une seule simulation de MC en utilisant un échantillon de grande taille, afin de fournir une estimation des quantités d'intérêt. Il est aussi possible d'obtenir des intervalles de confiance sur les estimateurs. D'après le théorème de la limite centrale, l'estimateur de l'équation 3.1 est asymptotiquement gaussien. Ainsi, pour n suffisamment grand, un intervalle de confiance de niveau $(1 - \alpha)$ sur μ_Y est donné par :

$$\hat{\mu}_Y - y_{\alpha/2} \hat{\sigma}_Y / \sqrt{n-1} \leq \mu_Y \leq \hat{\mu}_Y + y_{\alpha/2} \hat{\sigma}_Y / \sqrt{n-1} \quad (3.3)$$

où $y_{\alpha/2} = -\Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$, avec Φ avec la fonction de répartition d'une distribution gaussienne centrée réduite. Cette dernière équation peut aussi être utilisée avec un critère sur la largeur de l'intervalle de confiance. Supposons que l'espérance ait été calculée avec une précision $\pm \varepsilon_{\mu_Y}$ d'intervalle de confiance $(1 - \alpha)$. La taille minimale n_{min} de l'échantillon est alors :

$$n_{min} = 1 + \lceil (y_{\alpha/2} \hat{C}V_Y / \varepsilon_{\mu_Y})^2 \rceil \quad (3.4)$$

où $\lceil x \rceil$ arrondit x au plus petit entier, supérieur à x et $\hat{C}V_Y = \hat{\sigma}_Y / \hat{\mu}_Y$ est l'estimateur du coefficient de variation de Y .

Des intervalles de confiance de la variance de la réponse peuvent également être obtenus (voir [1]), ainsi que les moments d'ordre supérieurs. Cependant, la méthode de simulation de MC converge très lentement, i.e. en $1/\sqrt{N}$, où N est la taille de l'échantillon considéré. Afin de réduire les temps de calcul, des méthodes alternatives sont exposées dans ce chapitre.

3.1.3 Collocation stochastique (CS)

3.1.3.1 Introduction

Les méthodes statistiques de propagation d'incertitudes utilisées pour calculer les moments statistiques se décomposent en deux types d'approches : les techniques par perturbations et les méthodes de quadrature.

Le principe de la technique de perturbation s'appuie sur un développement limité autour des espérances des variables d'entrée. L'efficacité de la méthode dépend fortement de la linéarité du modèle.

L'idée des méthodes de quadrature est basée sur l'approximation des formulations intégrales des moments statistiques (i.e. espérance, variance...) par des sommes pondérées de fonctions à calculer et à évaluer en certains points. Parmi les différentes méthodes de quadrature, la méthode de *collocation stochastique* (CS) est souvent employée en CEM. Il s'agit d'une méthode non intrusive, i.e. qui ne nécessite aucune modification de la fonction ou du modèle à évaluer. Son principe est détaillé dans la section suivante.

3.1.3.2 Principe de la méthode de CS

Cas unidimensionnel

Soit f une fonction réelle : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et X est une variable aléatoire. La méthode de CS permet d'obtenir l'espérance et la variance de la réponse aléatoire $Y = f(X)$. Pour cela, elle s'appuie sur le choix d'un nombre limité de réalisations judicieusement choisies de l'observable Y . Le principe consiste à projeter la fonction f sur une base de polynômes de Lagrange :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^n b_i L_i(x) \quad (3.5)$$

où les n polynômes de Lagrange $L_1(x), \dots, L_n(x)$ forment une base de degré inférieur ou égal à $n - 1$. Ils sont donnés par :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (3.6)$$

et vérifient la propriété :

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (3.7)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et les points x_j sont appelés points de collocation. Ces points de collocation x_j sont choisis de manière à ce qu'ils correspondent aux points d'intégration de la règle de quadrature de Gauss associée à la loi de probabilité des variables aléatoires d'entrée (e.g. polynômes de Hermite pour une distribution gaussienne).

L'intégrale d'une fonction h est alors approximée par une somme pondérée de h en ces points :

$$\int_{\mathbb{R}} p(x) h(x) dx \approx \sum_{j=1}^n \omega_j h(x_j), \quad (3.8)$$

où p est la densité de probabilité de la variable aléatoire X et les ω_j sont les poids d'intégration.

L'espérance de l'observable $Y = f(X)$ est donnée par :

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) p(x) dx. \quad (3.9)$$

En remplaçant la réponse $f(x)$ par l'expression 3.5, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X)] &\approx \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n b_i L_i(x) p(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n b_i \int_{\mathbb{R}} L_i(x) p(x) dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

En utilisant la règle de quadrature de Gauss 3.8, on peut écrire :

$$\int_{\mathbb{R}} p(x) L_i(x) dx \approx \sum_{j=1}^n \omega_j L_i(x_j). \quad (3.11)$$

D'après la propriété 3.7, on obtient alors :

$$\int_{\mathbb{R}} p(x) L_i(x) dx \approx \omega_i. \quad (3.12)$$

L'équation 3.10 se réécrit alors :

$$\mathbb{E}[f(X)] \approx \sum_{i=1}^n \omega_i b_i. \quad (3.13)$$

En substituant x par x_j dans 3.5 et en utilisant 3.7, on arrive alors à :

$$\mathbb{E}[f(X)] \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i). \quad (3.14)$$

De manière similaire, la variance de l'observable $Y = f(X)$ définit par :

$$\text{Var}[f(X)] = \mathbb{E}[f(X)^2] - \mathbb{E}[f(X)]^2 \quad (3.15)$$

peut être approximée par :

$$\text{Var}[f(X)] \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)^2 - \mathbb{E}[f(X)]^2. \quad (3.16)$$

Cas multidimensionnel

Les moments peuvent également être obtenus pour un nombre de variables aléatoires d'entrée supérieur. En effet, si l'observable Z dépend de M variables aléatoires $Y = f(X_1, \dots, X_M)$, de lois de probabilité p_1, \dots, p_M ayant comme support D_1, \dots, D_M . On suppose que l'on dispose des points et des poids des règles de quadratures associées à ces lois de probabilité. Pour $k = 1, \dots, M$, on a alors pour $i_k = 1, \dots, n_k$, les points $(x_{i_k}^k)$ et les poids $(\omega_{i_k}^k)$ tels que :

$$\int_{D_k} p_k(x) h(x) dx \approx \sum_{i_k=1}^{n_k} \omega_{i_k}^k h(x_{i_k}^k). \quad (3.17)$$

En définissant les polynômes de Lagrange pour $k = 1, \dots, M$ et $i_k = 1, \dots, n_k$:

$$L_{i_k}(x) = \prod_{\substack{j_k=1 \\ j_k \neq i_k}}^{n_k} \frac{x - x_{j_k}^k}{x_{i_k}^k - x_{j_k}^k}, \quad (3.18)$$

on peut alors projeter f sur la base de ces polynômes :

$$f(x^1, \dots, x^M) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_M=1}^{n_M} b_{i_1 \dots i_M} L_{i_1}^1(x^1) \dots L_{i_M}^M(x^M). \quad (3.19)$$

En remplaçant (x^1, \dots, x^M) par $(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_M}^M)$ dans 3.19, avec $i_k = 1, \dots, n_k$ pour $k = 1, \dots, M$, et en utilisant la propriété des polynômes de Lagrange $L_i^k(x_j^k) = \delta_{ij}$, on peut écrire $b_{i_1 \dots i_M} = f(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_M}^M)$.

Enfin, l'espérance est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_M)] \\ &= \int_{D_1} \dots \int_{D_M} p_1(x_1) \dots p_M(x_M) f(x^1, \dots, x^M) dx_1 \dots dx_M \\ &\approx \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_M=1}^{n_M} \omega_{i_1} \dots \omega_{i_M} f(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_M}^M) \end{aligned} \quad (3.20)$$

et la variance s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Var}[Z] &= \mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_M)^2] - \mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_M)]^2 \\ &\approx \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_M=1}^{n_M} \omega_{i_1} \dots \omega_{i_M} f(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_M}^M)^2 - \mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_M)]^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

A travers les formules d'espérance et de variance, on remarque que le coût de calcul augmente considérablement avec la dimension. En effet, pour un nombre r de points de collocations, et de M variables aléatoires d'entrée, il faut r^M réalisations. L'inconvénient majeur de la méthode est que son efficacité diminue fortement lorsque le nombre de variables aléatoires d'entrée augmente. Pour cette raison, on effectue généralement une analyse de sensibilité globale (voir section 3.2.1) avant la méthode de CS pour réduire le nombre de variables aléatoires d'entrée et conserver celles qui ont le plus d'influence sur la réponse du modèle. Dans ce cas, la CS fait preuve d'une bonne précision et d'une efficacité remarquable (seulement quelques réalisations permettent d'aboutir à un résultat satisfaisant) par rapport à une approche à partir de simulation de MC [2].

3.1.4 Chaos polynomial (CP)

3.1.4.1 Développement par CP de la réponse d'un modèle

On considère un système décrit par un modèle numérique \mathcal{M} (e.g. une fonction analytique, un code aux éléments finis). Pour simplifier cette présentation, nous supposons que ce modèle dépende de M variables aléatoires *indépendantes* (représentant des paramètres incertains) (X_1, \dots, X_M) , regroupées dans un vecteur aléatoire \mathbf{X} . Le vecteur aléatoire \mathbf{X} est caractérisé par sa densité jointe (supposée connue) notée $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$. La réponse aléatoire du modèle $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ est supposée scalaire et de variance finie.

On montre que la réponse aléatoire Y peut être développée sur une base [3] :

$$Y = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^M} \mathbf{a}_{\boldsymbol{\lambda}} \Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{X}) \quad (3.22)$$

où les $\mathbf{a}_{\boldsymbol{\lambda}}$ sont des coefficients inconnus, les $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}$ représentent une base constituée de polynômes orthonormaux de variables aléatoires avec $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_M\}$ définissant un vecteur des degrés des polynômes. Le développement 3.22 est appelé représentation par *chaos polynomial* (CP) de Y .

Pour construire cette base, on définit une famille de polynômes orthonormaux $\{P_k^i, k \in \mathbb{N}\}$ de degré k pour chaque variable aléatoire d'entrée X_i . L'orthonormalité est définie par rapport à la densité $f_X(x_i)$ comme :

$$\langle P_j^i, P_k^i \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P_j^i(x) P_k^i(x) f_{X_i}(x) dx = \delta_{jk} \quad (3.23)$$

où $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$ et 0 sinon.

En pratique, des familles de polynômes orthogonaux sont associées en fonction des lois des variables aléatoires d'entrée. Par exemple, si X_i est de loi gaussienne (resp. uniforme) alors la famille des polynômes d'Hermite (resp. Legendre) est choisie.

On peut alors construire une famille de polynômes multivariés $\{\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^M\}$ formant une base en multipliant les polynômes univariés entre eux :

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^M P_{\lambda_i}^i(x_i). \quad (3.24)$$

Ces polynômes sont orthonormaux par rapport à la densité $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$:

$$\langle \Psi_{\lambda}, \Psi_{\beta} \rangle = \int_{\mathbb{R}^M} \Psi_{\lambda}(\mathbf{x}) \Psi_{\beta}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{\lambda\beta}. \quad (3.25)$$

La série du développement par CP est ensuite tronquée afin de ne conserver que les polynômes de la base Ψ_{λ} dont le degré $|\lambda| = \sum_{j=1}^M \lambda_j$ ne dépasse pas h :

$$Y^{\text{CP}} = \sum_{\lambda \in \mathbb{N}^M, 0 \leq |\lambda| \leq h} a_{\lambda} \Psi_{\lambda}(\mathbf{X}) \quad (3.26)$$

où les polynômes sont de degrés $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_M\}$. Pour M variables aléatoires, le nombre de polynômes H de degré inférieur ou égal à h est :

$$H = \frac{(M+h)!}{M!h!} \quad (3.27)$$

3.1.4.1.a Exemple de construction de base du CP

Supposons que la réponse aléatoire Y d'un modèle $\mathcal{M}(X_1, X_2)$ dépende de deux variables aléatoires gaussiennes X_1 et X_2 dont les espérances et les écarts-types sont respectivement notés μ_1, μ_2 et σ_1, σ_2 .

En utilisant une transformation linéaire, i.e. $\xi_i = \frac{(X_i - \mu_i)}{\sigma_i}$, les variables aléatoires d'entrée X_i peuvent être transformées en variables aléatoires gaussiennes centrées réduites ξ_i .

Ainsi, l'ensemble des polynômes d'Hermite définis par :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_n(x) &= xP_{n-1}(x) - \frac{dP_{n-1}(x)}{dx} \end{aligned} \quad (3.28)$$

vérifient l'orthogonalité par rapport à la densité de probabilité Gaussienne $\varphi(x) = \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$:

$$\langle P_i, P_j \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P_i(x) P_j(x) \varphi(x) dx = \delta_{ij} \cdot i! \quad (3.29)$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

On remarque alors que pour vérifier l'orthonormalité, il faut considérer les polynômes

$$\tilde{P}_i(x) = \frac{P_i(x)}{\sqrt{\langle P_i, P_i \rangle}} = \frac{P_i(x)}{\sqrt{i!}}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

On suppose que l'on souhaite représenter la réponse aléatoire Y par un développement en CP de degré inférieur ou égal à $h = 3$. En chacune des variables ξ_1, ξ_2 , on utilise les polynômes d'Hermite normés $\tilde{P}_{\lambda_1}(\xi_1), \tilde{P}_{\lambda_2}(\xi_2)$ pour former la base $\Psi_{(\lambda_1, \lambda_2)}(\xi_1, \xi_2)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \xi_1 \\ (\xi_1^2 - 1)/\sqrt{2} \\ (\xi_1^3 - 3\xi_1)/\sqrt{6} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\tilde{P}_{\lambda_1}(\xi_1)} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \xi_2 \\ (\xi_2^2 - 1)/\sqrt{2} \\ (\xi_2^3 - 3\xi_2)/\sqrt{6} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\tilde{P}_{\lambda_2}(\xi_2)} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_1 \xi_2 \\ (\xi_1^2 - 1)/\sqrt{2} \\ (\xi_2^2 - 1)/\sqrt{2} \\ (\xi_1^2 - 1)\xi_2/\sqrt{2} \\ (\xi_2^2 - 1)\xi_1/\sqrt{2} \\ (\xi_1^3 - 3\xi_1)/\sqrt{6} \\ (\xi_2^3 - 3\xi_2)/\sqrt{6} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\Psi_{(\lambda_1, \lambda_2)}(\xi_1, \xi_2)}$$

La réponse Y peut alors s'exprimer en fonction de cette base Ψ_{λ} comme suit :

$$\begin{aligned}
 Y^{\text{CP}} &= \sum_{\lambda \in \mathbb{N}^2, 0 \leq |\lambda| \leq 3} \mathbf{a}_{(\lambda_1, \lambda_2)} \Psi_{(\lambda_1, \lambda_2)}(\xi_1, \xi_2) \\
 &= \mathbf{a}_{(0,0)} \Psi_{(0,0)}(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{a}_{(1,0)} \Psi_{(1,0)}(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{a}_{(0,1)} \Psi_{(0,1)}(\xi_1, \xi_2) \\
 &\quad + \mathbf{a}_{(1,1)} \Psi_{(1,1)}(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{a}_{(2,0)} \Psi_{(2,0)}(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{a}_{(0,2)} \Psi_{(0,2)}(\xi_1, \xi_2) \\
 &\quad + \mathbf{a}_{(2,1)} \Psi_{(2,1)}(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{a}_{(1,2)} \Psi_{(1,2)}(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{a}_{(3,0)} \Psi_{(3,0)}(\xi_1, \xi_2) \\
 &\quad + \mathbf{a}_{(0,3)} \Psi_{(0,3)}(\xi_1, \xi_2) \\
 &= \mathbf{a}_{(0,0)} \cdot 1 + \mathbf{a}_{(1,0)} \cdot \xi_1 + \mathbf{a}_{(0,1)} \cdot \xi_2 + \mathbf{a}_{(1,1)} \cdot \xi_1 \xi_2 + \mathbf{a}_{(2,0)} \cdot (\xi_1^2 - 1)/\sqrt{2} \\
 &\quad + \mathbf{a}_{(0,2)} \cdot (\xi_2^2 - 1)/\sqrt{2} + \mathbf{a}_{(2,1)} \cdot (\xi_1^2 - 1)\xi_2/\sqrt{2} + \mathbf{a}_{(1,2)} \cdot (\xi_2^2 - 1)\xi_1/\sqrt{2} \\
 &\quad + \mathbf{a}_{(3,0)} \cdot (\xi_1^3 - 3\xi_1)/\sqrt{6} + \mathbf{a}_{(0,3)} \cdot (\xi_2^3 - 3\xi_2)/\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

avec les coefficients $\mathbf{a}_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ à déterminer où $0 \leq \lambda_1 \leq 3$, $0 \leq \lambda_2 \leq 3$. Ces coefficients peuvent être identifiés au moyen de différentes approches qui sont présentées maintenant.

3.1.4.2 Calcul des coefficients de la base du CP

Le développement de la réponse aléatoire Y sur la base du CP conduit à identifier une famille définie par une liste de coefficients :

$$\mathcal{A} = \{a_{\lambda}^i : \lambda \in \mathbb{N}^M, 0 \leq |\lambda| \leq h, i = 1, \dots, M\} \quad (3.30)$$

Ces coefficients peuvent être calculés à partir d'un ensemble d'évaluations de l'observable Y pour des réalisations de paramètres d'entrée bien choisies. Cette approche présente l'avantage d'être non intrusive, c'est à dire qu'elle ne nécessite pas de modification du modèle \mathcal{M} . Parmi ces techniques non intrusives, deux types de méthodes équivalentes permettent de calculer les coefficients du CP : les approches par *projection* et par *régression*.

3.1.4.2.a Approches par projection

Les approches par projection utilisent l'orthonormalité de la base du CP pour calculer les coefficients du développement. Ainsi, en multipliant l'équation 3.22 par $\Psi_{\lambda}(\mathbf{X})$ puis en

prenant l'espérance de l'expression, on montre que :

$$\mathbf{a}_\lambda = \mathbb{E}[\mathcal{M}(\mathbf{X})\Psi_\lambda(\mathbf{X})] = \int_D \mathcal{M}(\mathbf{x})\Psi_\lambda(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (3.31)$$

où D est le support de X .

En pratique, l'estimation de 3.31 peut se faire à partir de méthodes d'intégration numérique permettant d'approcher l'intégrale par une somme pondérée :

$$\hat{\mathbf{a}}_\lambda = \sum_{i=1}^n \omega_i \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)})\Psi_\lambda(\mathbf{x}^{(i)}) \quad (3.32)$$

où les $\mathbf{x}^{(i)}$ sont les points choisis dans l'espace des paramètres incertains et les ω_i sont les poids d'intégration. Différentes techniques peuvent être employées pour le choix des points et des poids d'intégration. Par exemple, la simulation de MC peut être considérée avec N points aléatoires de poids $\frac{1}{N}$ comme suit :

$$\hat{\mathbf{a}}_\lambda = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)})\Psi_\lambda(\mathbf{x}^{(i)}) \quad (3.33)$$

Comme mentionné dans la section 3.1.2, la vitesse de convergence de la simulation de MC est lente, i.e. en $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Cependant, ce taux de convergence peut être accéléré au moyen d'autres techniques comme l'échantillonnage par *Latin hypercube* [4]. Le principe consiste à effectuer des tirages dans l'espace des paramètres d'entrée, segmentés en strates au préalable. La technique de quadrature 3.8 peut également être utilisée pour l'estimation de l'intégrale 3.31.

3.1.4.2.b Approches par régression

La série du développement par CP (3.26) peut se réécrire comme la somme de la série tronquée :

$$Y^{\text{CP}} = \sum_{j=0}^{H-1} \mathbf{a}_j \Psi_j(\mathbf{X}) \quad (3.34)$$

où $H = \frac{(M+h)!}{M!h!}$ si tous les polynômes multivariés $\Psi_\lambda(\mathbf{X})$ de degré $|\lambda| \leq h$ sont considérés (en les numérotant de 0 à $H-1$).

En introduisant la notation suivante :

$$\mathbf{a} = \{a_0, \dots, a_{H-1}\}^T \quad (3.35)$$

$$\Psi(\mathbf{X}) = \{\Psi_0(\mathbf{X}), \dots, \Psi_{H-1}(\mathbf{X})\}^T \quad (3.36)$$

où $(\cdot)^T$ représente la transposée, la relation 3.37 s'écrit :

$$Y^{\text{CP}} = \mathbf{a}^T \Psi(\mathbf{X}). \quad (3.37)$$

On génère un ensemble $\{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}\}^T$ de réalisations des vecteurs d'entrée, i.e. *un plan d'expériences*. Ce plan d'expériences peut être construit à partir de tirages aléatoires de type MC ou de tirages par Latin hypercube par exemple. On note \mathcal{Y} l'ensemble des réponses du modèle \mathcal{M} correspondantes.

La résolution du problème de régression consiste à identifier l'estimateur des moindres carrés donné par :

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^H} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{a}^T \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) \right)^2. \quad (3.38)$$

On peut montrer que l'estimateur s'écrit :

$$\hat{\mathbf{a}} = (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y} \quad (3.39)$$

où $\boldsymbol{\Phi}$ est la matrice de terme $\boldsymbol{\Phi}_{ij} = \Psi_j(\mathbf{x}^{(i)})$, $i = 1, \dots, N$ et $j = 0, \dots, H-1$.

Cependant, il faut un nombre d'évaluations du modèle \mathcal{M} supérieur au nombre de coefficients H du CP afin que le problème de régression soit bien posé. De manière générale, la règle $N = 2H$ points choisis par tirages aléatoires ou tirages par Latin hypercube mène à des résultats convenables [3].

3.1.4.3 Post-traitements des coefficients de la base du CP

Une fois les coefficients dans la base du CP obtenus, il est possible d'effectuer des post-traitements à moindre coût de calculs pour évaluer une quantité d'intérêt. Par exemple, l'orthonormalité de la base permet d'obtenir directement l'espérance et la variance de la réponse Y à partir des coefficients :

$$\mathbb{E}[Y] = a_0 \quad (3.40)$$

$$\text{Var}[Y] = \sum_{j=1}^{H-1} a_j^2 \quad (3.41)$$

Il est également possible d'obtenir d'autres quantités d'intérêt telles que la densité de probabilité de la réponse Y , une probabilité de défaillance ou effectuer une analyse de sensibilité des paramètres d'entrée.

3.1.5 Krigeage

Le krigeage est une méthode d'estimation linéaire garantissant le minimum de variance. Le terme « krigeage » provient du nom de famille de l'ingénieur minier sud-africain Danie G. Krige. Il a été formalisé pour la prospection minière par Georges Matheron [5] à l'École des mines de Paris.

Supposons que nous ayons à évaluer en n points, une fonction f dépendant d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_M\}$ contenant M variables. On note l'ensemble des réalisations du vecteur d'entrée $\boldsymbol{\mathcal{X}} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}\}$ et l'ensemble des réponses associées $\boldsymbol{\mathcal{Y}} = \{f(\mathbf{x}^{(1)}), \dots, f(\mathbf{x}^{(n)})\}$.

Le métamodèle Krigeage est basé sur un processus stochastique, qui est exprimé pour tout vecteur d'entrée \mathbf{x} comme [6] :

$$y(\mathbf{x}^{(i)}) = \mu + \gamma(\mathbf{x}^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.42)$$

où l'espérance μ est un modèle de régression estimé à partir des données disponibles (e.g. une fonction polynomiale en \mathbf{x}) et $\gamma(\mathbf{x}^{(i)})$ est un processus gaussien d'espérance nulle et de fonction de covariance $\text{Cov}(\cdot, \cdot)$. En pratique la fonction de covariance (inconnue) peut être modélisée comme :

$$\text{Cov}(\gamma(\mathbf{x}^{(i)}), \gamma(\mathbf{x}^{(j)})) = \sigma^2 \cdot \text{Corr}(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}), \quad (3.43)$$

où σ^2 est la variance du processus et $\text{Corr}(\cdot, \cdot)$ est une fonction de corrélation paramétrique. Cette fonction de corrélation est généralement choisie comme :

$$\text{Corr}(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) = \exp\left(-\sum_{h=1}^M \theta_h |x_h^{(i)} - x_h^{(j)}|^{p_h}\right) \quad (\theta_h \geq 0, p_h \in [0, 2]) \quad (3.44)$$

où p_h sont les paramètres représentant le lissage de l'interpolation (e.g. $p_h = 2$ est le plus lisse et correspond à une fonction de corrélation gaussienne) et les θ_h sont les facteurs d'échelle qui peuvent être estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. D'autres fonctions de corrélation existent et le choix de ces fonctions de corrélation a un impact direct sur la précision de la prédiction.

Une fois les paramètres de corrélation θ_h et p_h obtenus, nous pouvons estimer les valeurs de μ et σ^2 par la méthode du maximum de vraisemblance comme :

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{\mathbf{1}^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{Y}}{\mathbf{1}^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{1}} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{1}\hat{\mu})^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{1}\hat{\mu})}{n}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

où \mathbf{R} est la matrice de taille $n \times n$ dont le terme (i, j) est $\mathbf{R}_{ij} = \text{Corr}(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)})$ et $\mathbf{1}$ est le vecteur de taille n contenant les valeurs 1.

Le krigeage fournit une prédiction linéaire sans biais pour tout vecteur d'entrée \mathbf{x}^* :

$$\hat{y}(\mathbf{x}^*) = \hat{\mu} + \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{1}\hat{\mu}), \quad (3.46)$$

où $\mathbf{r} = [\text{Corr}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{(1)}), \dots, \text{Corr}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{(n)})]^T$ est le vecteur de corrélation entre les réalisations disponibles $\{\mathbf{x}^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$ et la réalisation $\{\mathbf{x}^*\}$ où s'effectue la prédiction.

De plus, ce métamodèle est basé sur un processus gaussien permettant d'estimer un intervalle de confiance de la prédiction 3.46 à partir de la variance :

$$s^2(\mathbf{x}^*) = \sigma^2 \left(1 - \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} + \frac{(1 - \mathbf{1}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r})^2}{\mathbf{1}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{1}} \right). \quad (3.47)$$

Cet indicateur peut alors être directement exploité afin de choisir judicieusement des nouveaux points pour lesquels l'évaluation de la fonction exacte (ou le modèle numérique) permet d'améliorer la précision du méta-modèle. Une illustration de l'interpolation par krigeage de la fonction $y = x \cdot \sin(x)$ et de l'intervalle de confiance associé à 95 % est donnée sur la figure 3.1.

Puisque le méta-modèle krigeage s'appuie sur la matrice de corrélation spatiale entre les points échantillonnés, il présente des limites lorsque la dimension de l'espace d'entrée et le nombre de points échantillonnés augmente. Cette méthode est également limitée lorsque la fonction à modéliser présente des discontinuités.

3.1.6 Quelques applications traitant des incertitudes en CEM

Ces dernières années, différentes techniques statistiques ont été employées en CEM pour traiter des problèmes comportant des incertitudes. Ces différentes méthodes sont généralement la collocation stochastique (CS) [2, 8–16], la technique dite d'*unscented transform* (UT) [13,

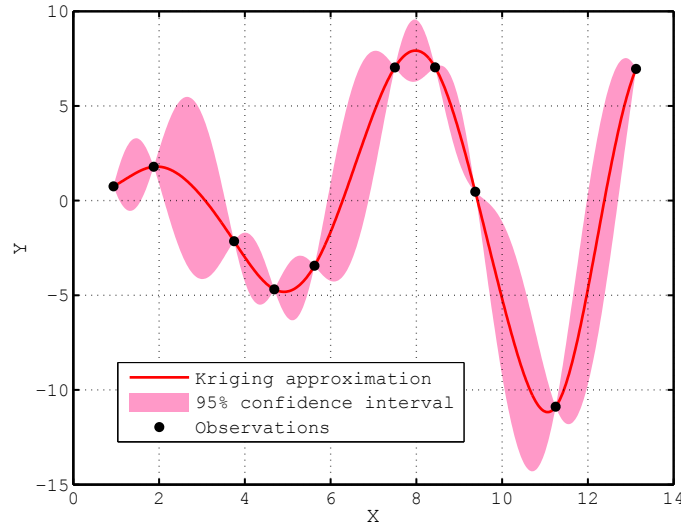


FIGURE 3.1 – Le métamodèle krigage et l'intervalle de confiance associé à 95 % [7].

17], les plans d'expériences [18, 19], les métamodèles de type *chaos polynomial* (CP) [20–26] et le krigage [27, 28], ou encore la théorie des valeurs extrêmes [29–31].

Elles ont été appliquées en Bio-CEM [12, 28, 32–34] et en CEM [14, 35], via des études portant sur la vulnérabilité [29, 30, 35–38], la susceptibilité [18, 19, 24–26, 39, 40], l'efficacité de blindage [15] ou encore le retournement temporel [2, 16].

A l'exception de [29–31, 36, 37], on remarque que les travaux effectués se sont principalement intéressés à l'effet des incertitudes d'entrée sur la tendance centrale (espérance, écart-type, pdf) d'observables (e.g. courant, tension...) issus d'un couplage champ EM-câbles [8, 27, 41]. D'autres études ont été menées sur l'exposition d'êtres humains aux ondes EM par l'intermédiaire de l'évaluation d'une quantité d'intérêt, le débit d'absorption spécifique (DAS) [12, 28, 32–34].

A travers cet état de l'art, nous constatons que seules quelques études ont été menées sur l'analyse de valeurs extrêmes. L'objet de la section suivante est alors d'établir un inventaire des différents outils introduits dans le domaine des sciences de l'ingénieur, et qui pourront s'avérer intéressants notamment dans le contexte de l'analyse de risque d'un défaut CEM.

3.2 Outils statistiques traitant de l'aléa en sciences de l'ingénieur

3.2.1 Analyse de sensibilité globale par les indices de Sobol

Les indices de Sobol [42] visent à quantifier l'impact de la variabilité de chaque (ou d'un ensemble) variable aléatoire d'entrée X_i sur la variabilité de la réponse Y d'une fonction f connue de manière implicite (i.e. de forme analytique non connue).

Le principe est basé sur la décomposition du modèle f en somme de fonctions de dimensions

croissantes :

$$Y = f(X_1, \dots, X_n) = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i(X_i) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} f_{ij}(X_i, X_j) + \dots + f_{1, \dots, n}(X_1, \dots, X_n) \quad (3.48)$$

où

$$\begin{aligned} f_0 &= \mathbb{E}[Y], \\ f_i(X_i) &= \mathbb{E}[Y|X_i] - \mathbb{E}[Y], \\ f_{i,j}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}[Y|X_i, X_j] - \mathbb{E}[Y|X_i] - \mathbb{E}[Y|X_j] + \mathbb{E}[Y], \\ f_{i,j,k}(X_i, X_j, X_k) &= \mathbb{E}[Y|X_i, X_j, X_k] - \mathbb{E}[Y|X_i, X_j] - \mathbb{E}[Y|X_i, X_k] - \mathbb{E}[Y|X_j, X_k] + \dots \end{aligned}$$

Cette décomposition a été introduite par Sobol [42] pour l'analyse de sensibilité. Ce dernier a notamment montré qu'elle était *unique* [43].

Ainsi, lorsque les variables aléatoires d'entrée X_i sont *indépendantes*, la variance de la réponse Y peut être décomposée comme suit :

$$\text{Var}(Y) = V = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} + \dots + V_{1 \dots n} \quad (3.49)$$

où

$$\begin{aligned} V_i &= \text{Var}(\mathbb{E}[Y|X_i]), \\ V_{ij} &= \text{Var}(\mathbb{E}[Y|X_i, X_j]) - V_i - V_j, \\ V_{ijk} &= \text{Var}(\mathbb{E}[Y|X_i, X_j, X_k]) - V_{ij} - V_{ik} - V_{jk} - V_i - V_j - V_k, \\ &\dots \\ V_{1 \dots n} &= V - \sum_{i=1}^n V_i - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} V_{ij} - \dots - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq n} V_{i_1 \dots i_{n-1}} \end{aligned}$$

L'importance d'une variable aléatoire X_i sur la variance de la réponse Y se quantifie en étudiant la décroissance de la variance de Y dans le cas où l'on fixe la variable X_i à une valeur x_i^* , i.e. $\text{Var}(Y|X_i = x_i^*)$. Afin de considérer toutes les valeurs possibles x_i^* de l'espace de la variable X_i , il suffit de considérer l'espérance $\mathbb{E}[\text{Var}(Y|X_i)]$, qui sera d'autant plus faible par rapport à la variance de Y , que la variable X_i est importante. En s'appuyant sur la formule de la variance totale :

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(\mathbb{E}[Y|X_i]) + \mathbb{E}[\text{Var}(Y|X_i)], \quad (3.50)$$

on peut utiliser de manière équivalente le fait que la quantité $\text{Var}(\mathbb{E}[Y|X_i])$ sera plus grande lorsque la variable X_i sera importante par rapport à la variance de Y .

On définit alors à partir de la relation 3.50 et de la décomposition de la variance 3.49, l'indicateur normalisé appelé *indice de sensibilité de premier ordre* de Sobol pour $i = 1, \dots, n$:

$$S_i = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}[Y|X_i])}{\text{Var}(Y)} = \frac{V_i}{V}. \quad (3.51)$$

Cet indice quantifie la sensibilité de la réponse Y par rapport à la variable aléatoire d'entrée X_i .

De manière similaire, il est également possible de définir les indices d'ordre plus élevés, e.g. pour le second ordre :

$$S_{ij} = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}[Y|X_i, X_j]) - V_i - V_j}{\text{Var}(Y)} = \frac{V_{ij}}{V}. \quad (3.52)$$

Par exemple, les *indices de second ordre* mesurent la sensibilité de la variance de Y par rapport à l'interaction des variables X_i et X_j , qui n'est pas prise en compte dans l'effet des variables seules.

Ces indices sont compris entre 0 et 1, et leur somme est égale à 1. De plus, si n est le nombre de variables alors le nombre d'indices de sensibilité construit est égal à $2^n - 1$. On remarque alors que pour un nombre de variables d'entrée n trop important, le nombre d'indices de sensibilité augmente considérablement.

Pour cette raison, Homma et Saltelli [44] ont introduit des indices de sensibilité totaux, qui quantifient la sensibilité totale de la variance Y à une variable X_i , en incluant toutes les interactions impliquant X_i .

L'indice de sensibilité total S_{T_i} est défini par :

$$S_{T_i} = \sum_{i \subset p} S_p \quad (3.53)$$

où $i \subset p$ est l'ensemble d'indices contenant l'indice i .

Par exemple, pour un modèle à trois variables d'entrée, $S_{T_1} = S_1 + S_{12} + S_{13} + S_{123}$.

En pratique, les indices de Sobol peuvent être estimés par simulation de MC. Pour un problème à k variables d'entrée, l'estimation de tous les indices nécessite $N \times 2^k$ appels à la fonction f , où N est la taille de l'échantillon. Par contre, l'estimation des indices de premier ordre et des indices totaux ne nécessite que $N \times (2p + 1)$ calculs. Pour cette raison, la démarche à adopter ne consiste à estimer dans un premier temps que les indices de premier ordre et les indices totaux. Si les écarts entre ces indices sont faibles, cela montre que l'effet des variables est principalement expliqué par chacune d'entre elles (prises toutes seules) et qu'il n'est pas nécessaire de calculer les indices d'ordres intermédiaires. Dans la situation opposée, cela signifie que la part associée aux interactions entre variables d'entrée est significative et qu'il peut être utile d'estimer les indices d'ordres plus élevés.

De plus, puisque le nombre de simulations demandé pour l'évaluation des indices de Sobol est important, il est très fréquent d'avoir recourt à une approximation de la fonction f par un métamodèle. En général, un échantillon de taille 10000 (obtenu souvent à l'aide d'un métamodèle) suffit pour estimer les indices de sensibilité d'une fonction dépendant de 10 variables [43].

3.2.2 Actualisation bayésienne des paramètres d'entrée

3.2.2.1 Introduction

Dans la section précédente, l'analyse de sensibilité globale permet de quantifier l'impact de la variabilité d'une variable d'entrée sur la réponse de la fonction d'intérêt f . Cependant, la méthode proposée n'apporte aucune information supplémentaire sur la distribution des paramètres d'entrée du modèle. Une mise à jour de la description probabiliste des paramètres d'entrée peut être très intéressante. En effet, le modèle probabiliste établi en phase de conception présente souvent des limites quand on cherche à représenter l'aléa de la réponse d'un

système réel. Si l'incertitude qui repose sur un paramètre d'entrée est trop grande à cause du manque de connaissance de ce paramètre, il arrive souvent d'observer une importante variabilité de la réponse du modèle. Dans ce contexte, la prise de décision devient alors difficile.

Pour pallier le manque d'information sur les paramètres d'entrée du modèle, différentes techniques ont été proposées, en particulier en dynamique des structures. Le problème de l'identification (dans un contexte bayésien) de la meilleure valeur du paramètre d'entrée a été introduit afin de contrôler l'état des structures à partir de données de surveillance. L'objet de ces études était de déduire l'évolution de la rigidité en raison des dégâts, e.g. [45], [46].

Un procédé bayésien pour actualiser la densité de probabilité jointe des paramètres d'entrée du modèle est maintenant présenté.

3.2.2.2 Énoncé du problème

Supposons que le modèle mathématique $\mathcal{M}(\mathbf{x}, t)$ représente l'évolution dans le temps de la réponse $\mathbf{y}(t)$ d'un système, à valeurs dans \mathbb{R}^N , dépendant de paramètres regroupés dans un vecteur \mathbf{x} , à valeurs dans \mathbb{R}^M . Un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_M\}$ modélise le manque d'information sur les paramètres d'entrée par l'intermédiaire d'une loi de probabilité $p_{\mathbf{X}}$ déterminée en phase de conception. La réponse du modèle s'écrit comme un vecteur aléatoire \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y}(t) = \mathcal{M}(\mathbf{X}, t). \quad (3.54)$$

Il convient de souligner que la série des vecteurs $\{\mathbf{Y}(t), t \in [0, T]\}$ est un processus aléatoire, mais pour une réalisation \mathbf{x} du vecteur \mathbf{X} des paramètres d'entrée, l'évolution $t \rightarrow (\mathbf{Y}(t) | \mathbf{X} = \mathbf{x})$ est purement déterministe.

Soit $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ la valeur réelle de la réponse du système considéré. Dans le cas où le modèle est « parfait » et que la réalisation $\tilde{\mathbf{x}}$ des paramètres d'entrée est connue, on peut écrire :

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathcal{M}(\tilde{\mathbf{x}}, t). \quad (3.55)$$

Supposons que l'on dispose de mesures expérimentales $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(K)}\}$, correspondant à la réponse du système aux différents instants $\{t^{(1)}, \dots, t^{(K)}\}$. Les mesures expérimentales sont en général différentes des prédictions établies par le modèle, on suppose donc qu'il existe une réalisation $\mathbf{e}^{(k)}$ d'une variable aléatoire \mathbf{E} , considérée ici comme *erreur de modèle/mesure*, vérifiant :

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathcal{M}(\tilde{\mathbf{x}}, t^{(k)}) + \mathbf{e}^{(k)}. \quad (3.56)$$

Il est possible de décomposer l'erreur de modèle/mesure \mathbf{E} qui est considérée comme étant aléatoire, en $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{mes} + \mathbf{E}_{mod}$ où \mathbf{E}_{mes} est l'erreur commise lors de mesures expérimentales. L'erreur de modèle \mathbf{E}_{mod} est inconnue puisqu'elle n'est pas maîtrisée. En pratique, cette erreur est cependant calibrée à partir d'avis d'experts, en supposant par exemple que $\mathbf{E}_{mod} \equiv \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_{E_{mod}})$.

Si on suppose que les deux types d'erreur sont indépendantes, l'erreur de modèle/mesure obtenue suit une loi gaussienne :

$$\mathbf{E} \equiv \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_E), \quad (3.57)$$

avec $\mathbf{C}_E = \mathbf{C}_{E_{mes}} + \mathbf{C}_{E_{mod}}$. Ainsi, chaque mesure observée (i.e. variable aléatoire) s'exprime de manière conditionnelle à la réalisation du vecteur des paramètres d'entrée comme :

$$\mathbf{Y}_k | \mathbf{X} = \mathbf{x} \equiv \mathcal{N}\left(\mathcal{M}(\mathbf{x}, t^{(k)}), \mathbf{C}_E\right), \quad (3.58)$$

ou par la densité de probabilité conditionnelle de \mathbf{Y}_k :

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}_k|\mathbf{X}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t^{(k)}) &= \varphi_M(\mathbf{y} - \mathcal{M}(\mathbf{x}, t^{(k)})) \\ &= (2\pi)^{-\frac{M}{2}} (\det \mathbf{C}_E)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathcal{M}(\mathbf{x}, t^{(k)}))^T \cdot \mathbf{C}_E^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathcal{M}(\mathbf{x}, t^{(k)})) \right], \end{aligned} \quad (3.59)$$

où φ_M est la densité de probabilité de la loi multi-gaussienne de dimension M . En utilisant le théorème de Bayes (voir annexe B.1), il est possible d'obtenir la distribution *a posteriori* de \mathbf{X} , notée $f_{\mathbf{X}}$:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = c p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) L(\mathbf{x}|\mathbf{Y}), \quad (3.60)$$

où L est la fonction de vraisemblance donnée par :

$$L(\mathbf{x}|\mathbf{Y}) = \prod_{k=1}^K f_{\mathbf{Y}_k|\mathbf{X}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t^{(k)}) \quad (3.61)$$

et c est la constante de normalisation définie par :

$$c^{-1} = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) L(\mathbf{x}|\mathbf{Y}) d\mathbf{x}. \quad (3.62)$$

Dans la relation 3.60, le problème majeur du calcul de $f_{\mathbf{X}}$ se trouve dans l'évaluation de la constante de normalisation c . Différentes méthodes numériques peuvent être employées pour évaluer cette constante c , comme la technique de simulation par MC ou Latin hypercube.

De manière alternative, il existe une autre démarche qui évite de calculer la constante c en générant directement un échantillon selon la densité de probabilité 3.60. Ces techniques appelées méthodes de MC par chaînes de Markov sont abordées maintenant.

3.2.2.3 Méthodes d'actualisation par simulation de MC

3.2.2.3.a Chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est une suite de vecteurs aléatoires $\{\mathbf{X}_j, j \in \mathbb{N}\}$ telle que les propriétés probabilistes de chaque état j ne dépendent que de l'état $j-1$. Cela se traduit par : $\forall A \subset \mathcal{D}_{\mathbf{X}_j}$, on a :

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_j \in A | \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{j-1}) = \mathbb{P}(\mathbf{X}_j \in A | \mathbf{X}_{j-1}). \quad (3.63)$$

Une chaîne de Markov est dite homogène (dans le temps) si les densités marginales des états \mathbf{X}_j ne dépendent pas de j : $f_{\mathbf{X}_j}(\mathbf{x}) \equiv f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$. Sous cette condition, les propriétés associées à la chaîne sont complètement définies par la densité de transition J , correspondant à la probabilité conditionnelle suivante :

$$J(\tilde{\mathbf{X}}, A) = \mathbb{P}(\mathbf{X}_j \in A | \mathbf{X}_{j-1} = \tilde{\mathbf{X}}). \quad (3.64)$$

Principe de la simulation de Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC)

Les méthodes MCMC sont une classe d'algorithmes permettant d'échantillonner une densité de probabilité à partir de la construction d'une chaîne de Markov. L'idée est de générer itérativement des échantillons d'une chaîne de Markov, qui se comporte asymptotiquement comme la densité de probabilité que l'on souhaite échantillonner.

Plusieurs conditions sont nécessaires pour la convergence des algorithmes présentés dans la section suivante :

- l'*invariance* : si \mathbf{X}_j a pour densité de probabilité $f_{\mathbf{X}}$, alors $\mathbf{X}_{j+1}, \dots, \mathbf{X}_N$ ont pour densité marginale $f_{\mathbf{X}}$. Il est difficile de vérifier cette propriété en pratique, on choisit alors un noyau de transition J $f_{\mathbf{X}}$ -réversible vérifiant :

$$\int_A J(\mathbf{x}, B) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_B J(\mathbf{x}, A) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.65)$$

La relation 3.65 signifie que les probabilités de passer de A vers B et de B vers A sont égales ;

- l'*apériodicité* qui permet d'éliminer les noyaux conduisant à un comportement périodique de la chaîne de Markov ;
- la *récence* : l'espérance de la durée de retour sur un état est finie, i.e. les trajectoires de la chaîne de Markov repassent une infinité de fois dans A ;
- l'*irréductibilité*, i.e. en partant de n'importe quel point de départ $\mathbf{x}^{(0)}$, il est possible d'atteindre tous les ensembles de probabilité non nulle en un nombre fini d'itérations.

Ainsi, ces propriétés mènent à l'introduction de la notion d'*ergodicité* : une chaîne de Markov de distribution invariante, en plus d'être apériodique, récurrente et irréductible est appelée ergodique.

3.2.2.3.b Algorithmes de Metropolis-Hastings (MH)

L'algorithme de Metropolis-Hastings (MH) [47] est un algorithme d'échantillonnage avec rejet qui a pour but d'obtenir des réalisations de \mathbf{X} . La transition entre $\mathbf{x}^{(j)}$ et $\mathbf{x}^{(j+1)}$ est définie par l'intermédiaire de la *densité de transition* $q(\mathbf{x}|\mathbf{x}^{(j)})$.

L'algorithme de MH peut être présenté comme suit :

1. $j = 0$, initialiser avec une valeur arbitraire la chaîne à $\mathbf{x}^{(0)}$;

Tant que $j \leq N$

2. générer $\tilde{\mathbf{x}} \sim q(\mathbf{x}|\mathbf{x}^{(j)})$;
3. calculer le taux d'acceptation :

$$\alpha(\mathbf{x}^{(j)}, \tilde{\mathbf{x}}) = \min \left\{ 1, \frac{f_{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{x}}) q(\mathbf{x}^{(j)}|\tilde{\mathbf{x}})}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}^{(j)}) q(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{x}^{(j)})} \right\} ;$$

4. générer $u_p \sim \mathcal{U}([0,1])$:
 - (a) si $u_p < \alpha(\mathbf{x}^{(j)}, \tilde{\mathbf{x}})$ alors $\mathbf{x}^{(j+1)} \leftarrow \tilde{\mathbf{x}}$ et j devient $j + 1$ (acceptation) ;
 - (b) sinon, retourner en 2. (rejet).

L'efficacité de l'algorithme de MH dépend en majeure partie du choix de la densité de transition $q(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{x}^{(j)})$. En effet, elle doit couvrir le support de $f_{\mathbf{X}}$: si le support de $q(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{x}^{(j)})$ est trop petit, certaines zones du support de $f_{\mathbf{X}}$ ne sont pas explorées et l'échantillon simulé ne sera pas représentatif de \mathbf{X} . Au contraire, si le support de $q(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{x}^{(j)})$ est trop large, l'algorithme effectuera alors un grand nombre de rejets et sa convergence sera ralentie. En pratique, en fonction du choix de la densité de transition $q(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{x}^{(k)})$, plusieurs variantes de l'algorithme de MH existent [3].

Algorithme MH à marche aléatoire

On commence par générer un candidat $\tilde{\mathbf{x}}$ à partir de $\mathbf{x}^{(j)}$ en ajoutant une perturbation aléatoire :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{(j)} + \boldsymbol{\xi}, \quad (3.66)$$

où $\boldsymbol{\xi}$ est une réalisation du vecteur aléatoire $\boldsymbol{\Xi}$, généralement gaussien centré ou uniforme.

Dans ce cas, la densité de transition s'écrit :

$$q(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{x}^{(j)}) = q(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(j)}) \quad (3.67)$$

et la probabilité d'acceptation devient :

$$\alpha(\mathbf{x}^{(k)}, \tilde{\mathbf{x}}) = \min \left\{ 1, \frac{f_{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{x}}) q(\mathbf{x}^{(j)} - \tilde{\mathbf{x}})}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}^{(j)}) q(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(j)})} \right\}. \quad (3.68)$$

Si la densité de transition est $q(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{x}^{(j)})$ est symétrique, i.e. $q(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}) = q(\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x})$, la probabilité d'acceptation devient :

$$\alpha(\mathbf{x}^{(j)}, \tilde{\mathbf{x}}) = \min \left\{ 1, \frac{f_{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{x}})}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}^{(j)})} \right\}. \quad (3.69)$$

Cette version de l'algorithme MH s'appelle algorithme de *Metropolis-Hastings à marche aléatoire* (*random walk algorithm*). La principale difficulté de la méthode réside dans le choix des paramètres de la densité de transition, comme par exemple le paramètre d'échelle pour $\boldsymbol{\xi}$. En effet, s'il est trop petit, l'algorithme va accepter un grand nombre de candidats $\tilde{\mathbf{x}}$ (taux d'acceptation élevé) et la chaîne de Markov va converger trop lentement. Inversement, si le paramètre d'échelle est trop grand, cela va conduire à un taux d'acceptation trop faible [50]. [48] propose un algorithme pour calibrer le taux d'acceptation en modifiant plusieurs fois le paramètre d'échelle.

Algorithme MH indépendant

La densité de transition est indépendante de l'état $\mathbf{x}^{(j)}$, i.e. $q(\mathbf{x}|\mathbf{x}^{(j)}) = q(\mathbf{x})$, donnant la probabilité d'acceptation suivante :

$$\alpha(\mathbf{x}^{(j)}, \tilde{\mathbf{x}}) = \min \left\{ 1, \frac{f_{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{x}}) q(\mathbf{x}^{(j)})}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}^{(j)}) q(\tilde{\mathbf{x}})} \right\}. \quad (3.70)$$

De manière générale, l'algorithme de MH permet de générer des réalisations d'une densité de probabilité $f_{\mathbf{X}}$ quelconque. Cependant, au début de l'algorithme, les réalisations générées peuvent ne pas avoir $f_{\mathbf{X}}$ pour distribution car si le nombre d'itérations I (longueur de la chaîne de Markov) est trop petit, les propriétés asymptotiques de convergence ne sont pas atteintes. Il suffit donc d'éliminer les I_0 premières itérations, appelées la période de « chauffe ». Cela peut être fait par une représentation graphique permettant de visualiser le tracé de la chaîne de Markov et à éliminer les I_0 premières itérations [3].

En résumé, l'algorithme de MH utilisé dans le contexte bayésien, permet de simuler des réalisations de la densité de probabilité de la relation 3.60 sans avoir à calculer la constante de normalisation c .

3.2.2.3.c Actualisation de modèles par résolution du problème inverse

L'algorithme de MH est une technique particulièrement appropriée lorsque l'on souhaite simuler des réalisations *a posteriori* d'un vecteur aléatoire de densité $f_{\mathbf{X}}$ définie en 3.60. Le choix de la version de l'algorithme à utiliser est orienté par la densité de probabilité $p_{\mathbf{X}}$ choisie *a priori*. Ainsi, deux cas se présentent :

1. l'identification en phase de conception de la densité de probabilité $p_{\mathbf{X}}$ se fait à partir d'une collection de structures représentatives (e.g. maquettes, bancs d'essais) ;
2. le manque d'informations expérimentales est complété par un avis d'expert. Dans ce cas, le support de la densité de probabilité *a priori* peut ne pas couvrir le support de $f_{\mathbf{X}}$.

Dans le premier cas, l'algorithme de MH indépendant est adapté au problème posé. Si la densité de transition choisie est $p_{\mathbf{X}}$, la probabilité d'acceptation s'écrit en utilisant 3.60 :

$$\alpha(\mathbf{x}^{(j)}, \tilde{\mathbf{x}}) = \min \left\{ 1, \frac{c p_{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{x}}) L(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{Y}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}^{(j)})}{c p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}^{(j)}) L(\tilde{\mathbf{x}}^{(j)}|\mathbf{Y}) p_{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{x}})} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{L(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{Y})}{L(\tilde{\mathbf{x}}^{(j)}|\mathbf{Y})} \right\}. \quad (3.71)$$

Finalement, la probabilité d'acceptation ne dépend que de l'évaluation de la fonction de vraisemblance.

Dans le second cas, il est recommandé dans [49] d'utiliser l'algorithme MH à marche aléatoire « en cascade ». Cet algorithme génère un candidat $\tilde{\mathbf{x}}$ et l'accepte ou le rejette *successivement* par rapport aux densités $p_{\mathbf{X}}$ et L .

L'algorithme MH à marche aléatoire « en cascade » est le suivant :

1. $j = 0$, initialiser avec une valeur arbitraire la chaîne à $\mathbf{x}^{(0)}$;

Tant que $j \leq N$

2. générer ξ , calculer $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{(j)} + \xi$;
3. calculer le taux d'acceptation *a priori* :

$$\alpha(\mathbf{x}^{(j)}, \tilde{\mathbf{x}}) = \min \left\{ 1, \frac{p_{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{x}})}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}^{(j)})} \right\} ;$$

4. générer $u_p \sim \mathcal{U}([0,1])$:
 - (a) si $u_p < \alpha(\mathbf{x}^{(j)}, \tilde{\mathbf{x}})$ (acceptation) alors aller en 5.,
 - (b) sinon, retourner en 2. (rejet).
5. évaluer la probabilité d'acceptation pour la fonction de vraisemblance :

$$\alpha_L(\mathbf{x}^{(j)}, \tilde{\mathbf{x}}) = \min \left\{ 1, \frac{L(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{Y})}{L(\tilde{\mathbf{x}}^{(j)}|\mathbf{Y})} \right\},$$

où L est définie en 3.61. Noter que cela requiert de faire appel au modèle.

6. générer $u_L \sim \mathcal{U}([0,1])$:
 - (a) si $u_L < \alpha_L(\mathbf{x}^{(j)}, \tilde{\mathbf{x}})$ (acceptation) alors $\mathbf{x}^{(j+1)} \leftarrow \tilde{\mathbf{x}}$ et j devient $j + 1$,
 - (b) sinon, retourner en 2. (rejet),

Après avoir obtenu le nombre I de tirages, on élimine les I_0 premiers éléments par une analyse graphique ou d'autres procédures données dans [50].

3.2.2.3.d Conclusion

Cette section a permis d'introduire les méthodes de simulation par chaînes de Markov. Elles sont utiles pour simuler des réalisations de la densité de probabilité *a posteriori*, qui caractérise la loi actualisée du vecteur des paramètres d'entrée d'un modèle. Des mesures de la quantité de réponse du modèle sont nécessaires pour la mise en place de la méthode.

De plus, la démarche requiert l'évaluation de la fonction de vraisemblance L , faisant appel au modèle (voir la relation 3.61). Ainsi, il est clair que ces méthodes sont coûteuses en termes d'appels au modèle \mathcal{M} , en particulier lorsque le candidat $\tilde{\mathbf{x}}$ est souvent rejeté par le test de l'étape 6 de l'algorithme MH à marche aléatoire « en cascade ». En pratique, elles peuvent être appliquées à des modèles analytiques ou des méta-modèles (e.g. développements par *chaos polynomial*) de modèles complexes.

Une fois que les réalisations de la distribution *a posteriori* ont été calculées, des réalisations du vecteur de la quantité de réponse sont disponibles sans effort supplémentaire : i.e., le modèle a été évalué sur l'échantillon de la loi *a posteriori* au cours de l'algorithme qui a permis de le générer. Ainsi, la méthode fournit « gratuitement » la distribution *a posteriori* de la quantité de réponse.

3.2.3 Méthodes de fiabilité

Depuis de nombreuses années, les méthodes de fiabilité [51], [52] sont développées pour évaluer la sûreté des structures dans un contexte incertain. Il faut noter les travaux récents et pratiquement simultanés de l'institut Pascal visant à appliquer ces outils fiabilistes en CEM [53]. La fiabilité des structures a pour objectif de calculer la probabilité de défaillance P_f relative à un scénario de défaillance.

Le critère de défaillance est représenté mathématiquement par une fonction d'état-limite, notée g , dépendant du vecteur aléatoire d'entrée \mathbf{X} . Par convention, la fonction d'état-limite est définie par :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{X} &\longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{X}) - y_s \end{aligned} \quad (3.72)$$

où \mathcal{M} est le modèle de simulation numérique utilisé, y_s est un seuil fixé et :

- $D_f = \{\mathbf{x}; g(\mathbf{x}) \leq 0\}$ définit le *domaine de défaillance* ;
- $D_s = \{\mathbf{x}; g(\mathbf{x}) > 0\}$ définit le *domaine de sûreté* ;
- $\partial D = \{\mathbf{x}; g(\mathbf{x}) = 0\}$ est la *surface d'état-limite*.

Ainsi, la probabilité de défaillance est définie comme :

$$P_f = \mathbb{P}(g(\mathbf{x}) \leq 0) = \int_{D_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.73)$$

où $f_{\mathbf{X}}$ est la densité de probabilité jointe de \mathbf{X} .

Cependant, l'intégrale définie par la relation 3.73 est souvent très complexe à calculer car le domaine d'intégration est défini implicitement et la fonction d'état-limite est rarement analytique. Le calcul peut tout de même être effectué par une méthode d'intégration numérique comme la simulation de MC mais cette méthode nécessite un nombre important d'appels à la fonction d'état-limite g et par conséquent au modèle \mathcal{M} , en particulier quand on cherche à

calculer des probabilités faibles ($N_{\text{sim}} = 10^{k+3}$ pour une probabilité de défaillance de l'ordre de 10^{-k}). Il est donc assez difficile d'utiliser cette méthode lorsque le modèle physique est assez coûteux en termes de temps de calcul.

Ainsi, les méthodes FORM, SORM (*first and second order reliability methods*) qui consistent à approcher la fonction d'état-limite (resp. à l'ordre 1 et 2) ont été introduites pour approximer la probabilité de défaillance à un moindre coût de calcul. La technique FORM permet également de quantifier les effets des incertitudes en entrée du modèle physique à travers les mesures de sensibilité locale à la défaillance du système.

D'autres méthodes basées sur des simulations ont également été développées afin d'estimer une probabilité de défaillance. On peut notamment citer l'*importance sampling* [52] qui consiste à échantillonner une zone identifiée au préalable par FORM, ou encore le *subset simulation* [54] qui consiste à effectuer des simulations tendant progressivement vers le domaine de défaillance.

3.2.4 Estimation de quantile par stratification contrôlée (SC)

Supposons que l'on dispose d'un modèle simplifié noté $Z = f_s(\mathbf{X})$ et d'un modèle complexe noté $Y = f(\mathbf{X})$ permettant de fournir des quantités de réponse du phénomène d'intérêt. L'utilisation du modèle simplifié pour estimer directement un quantile extrême peut ne pas être efficace. En effet, un modèle simplifié peut reproduire la réponse du modèle complexe $f(\mathbf{X})$ pour des réalisations classiques de \mathbf{X} mais pas pour des réalisations rares de \mathbf{X} . Cependant, dans certaines conditions, il peut être néanmoins utile.

Dans cette section, nous introduisons brièvement la méthode de stratification contrôlée (SC) [55] qui consiste à utiliser le modèle simplifié et le modèle complexe pour la prédiction d'un quantile extrême. En effet, le modèle simplifié est exploité pour segmenter l'espace de sa sortie $Z = f_s(\mathbf{X})$ en k intervalles particuliers I_1, \dots, I_k appelées strates. Une fois ces intervalles définis, des réalisations de \mathbf{X} seront sélectionnées dans chacun de ces intervalles puis serviront à évaluer le modèle complexe $Y = f(\mathbf{X})$ afin d'augmenter le nombre de réalisations nécessaires pour l'estimation du quantile d'intérêt.

Soient $k + 1$ quantiles $-\infty = z_{\alpha_0} < z_{\alpha_1} < \dots < z_{\alpha_k} = \infty$ de Z associés aux probabilités $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = 1$. On définit par strates les intervalles $]z_{\alpha_{j-1}}, z_{\alpha_j}]$. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} F(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) &= \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(Y \leq y | Z \in]z_{\alpha_{j-1}}, z_{\alpha_j}]) \cdot \mathbb{P}(Z \in]z_{\alpha_{j-1}}, z_{\alpha_j}]) \\ &= \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(Y \leq y | Z \in]z_{\alpha_{j-1}}, z_{\alpha_j}]) \cdot (\alpha_j - \alpha_{j-1}). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Ainsi, l'estimation de $F(y)$ se résume aux estimations des probabilités conditionnelles suivantes :

$$p_j(y) = \mathbb{P}(Y \leq y | Z \in]z_{\alpha_{j-1}}, z_{\alpha_j}]). \quad (3.75)$$

Pour cela, on définit une suite d'entiers N_1, \dots, N_k tels que $\sum_{j=1}^k N_j = n$. On tire ensuite N_j réalisations des variables aléatoires d'entrée $(X_i^{(j)})_{i=1, \dots, N_j}$ de manière à obtenir N_j réponses $Z_i^{(j)}$ dans la strate $]z_{\alpha_{j-1}}, z_{\alpha_j}]$. Ensuite, on évalue les réponses du modèle complexe $Y_i^{(j)}$ pour ces N_j réalisations. A partir de ces réponses, on peut estimer les quantités $p_j(y)$ par :

$$\hat{p}_j(y) = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} \mathbb{1}_{Y_i^{(j)} \leq y}. \quad (3.76)$$

Enfin, l'estimateur $\hat{F}_{SC}(y)$ de la fonction de répartition est donné par :

$$\hat{F}_{SC}(y) = \sum_{j=1}^k \hat{p}_j(y)(\alpha_j - \alpha_{j-1}). \quad (3.77)$$

Cet estimateur est sans biais $\mathbb{E}[\hat{F}_{SC}(y)] = F(y)$ et sa variance est :

$$\text{Var}[\hat{F}_{SC}(y)] = \sum_{j=1}^k \frac{(\alpha_j - \alpha_{j-1})^2}{N_j} (p_j(y) - p_j(y)^2). \quad (3.78)$$

Ainsi, l'estimateur du quantile d'ordre α par stratification contrôlée $\hat{Y}_{SC}(\alpha)$ est :

$$\hat{Y}_{SC}(\alpha) = \inf\{y, \hat{F}_{SC}(y) > \alpha\} \quad (3.79)$$

où $\hat{F}_{SC}(y)$ est l'estimateur de la fonction de répartition introduit en 5.18.

Cependant, l'efficacité de la stratification contrôlée repose sur la capacité du modèle simplifié à reproduire les mêmes tendances relatives aux variables d'entrée que le modèle complexe au niveau des valeurs extrêmes. Dans le cas où le modèle simplifié (qui est beaucoup moins coûteux en temps de calcul) permet d'identifier des réalisations extrêmes avec le modèle complexe, l'estimation d'un quantile d'ordre α (α proche de 1) sera plus précise qu'une estimation empirique classique, qui s'appuie sur un échantillonnage de type MC.

3.3 Positionnement de la thèse

Ce chapitre a permis de passer en revue les principales méthodes statistiques utilisées pour la prise en compte de l'incertain dans le domaine de l'ingénierie, et spécifiquement en CEM. L'objectif de l'analyse était de répertorier les différentes techniques statistiques avancées issues des sciences de l'ingénieur et de mettre en évidence par l'intermédiaire d'une étude bibliographique, celles qui pourraient apporter une contribution intéressante en CEM. Une synthèse établissant les principaux avantages et inconvénients des outils statistiques présentés dans ce chapitre est donnée dans la table 3.1.

Différentes techniques statistiques telles que le *chaos polynomial*, la collocation stochastique, l'*unscented transform* et la théorie des valeurs extrêmes ont été introduites afin de traiter des problèmes CEM comprenant des incertitudes (voir section 3.1.6).

Toutefois, l'estimation de valeurs extrêmes d'observables dépendant de paramètres incertains dans des problèmes de CEM, a fait l'objet de quelques travaux seulement.

En effet, ce type d'étude est particulièrement intéressante pour un concepteur CEM dans la mesure où il doit estimer le risque de dysfonctionnement de son système afin de garantir la protection des équipements électroniques face à de potentiels signaux parasites. En phase de conception, il n'existe qu'une très vague idée des impédances d'extrémité présentées par les équipements de bout de ligne.

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons alors à la mise en oeuvre d'outils statistiques, qui pourraient permettre à un ingénieur CEM d'identifier les différents scénarios de défaut présentés par son système, et proposer des stratégies de conception plus robustes.

A partir des outils statistiques présentés en section 3.2, nous remarquons que des techniques utilisées dans les sciences de l'ingénieur telles que les méthodes fiabilistes (FORM, SORM, *importance sampling* et *subset simulation*, voir section 3.2.3), ou encore la technique

de stratification contrôlée (voir section 3.2.4) pourraient permettre d'effectuer ce type d'analyse. Ce manuscrit sera donc consacré à la présentation détaillée de ces techniques, puis à leurs mises en oeuvre sur un problème réaliste de CEM (cas d'application du CEA/Gramat).

TABLE 3.1 – Synthèse des méthodes statistiques.

Méthode	Objectifs	Avantages	Inconvénients
Monte Carlo	Peut résoudre tout type de problème	Efficacité indépendante de la dimension	Convergence très lente
Collocation stochastique	Estimation de l'espérance et de la variance de l'observable	Convergence rapide	Coût croissant avec la dimension
Chaos polynomial	Approximation d'un modèle coûteux par une fonction analytique	Convergence rapide	Coût croissant avec la dimension
Krigeage	Approximation d'un modèle coûteux par une fonction analytique	Convergence rapide- Prise en compte des corrélations spatiales des données d'entrée	Coût croissant avec la dimension- Condition de régularité sur la réponse du modèle
Indices de Sobol	Analyse de sensibilité globale	Quantification de l'effet des incertitudes des variables d'entrée sur la réponse du modèle	Coût croissant avec la dimension- Besoin de remplacer le modèle coûteux par un métamodèle (i.e. fonction analytique)
FORM, SORM	Estimation d'une probabilité de défaillance- Analyse de sensibilité locale	Convergence rapide	Aucune information sur l'erreur commise- Condition de régularité sur la réponse du modèle
Importance sampling	Estimation d'une probabilité de défaillance	Convergence rapide	Condition de régularité sur la réponse du modèle
Subset simulation	Estimation d'une probabilité de défaillance en grande dimension	Convergence assez rapide- Aucune condition de régularité sur la réponse du modèle	Coût croissant avec la dimension
Stratification contrôlée	Estimation de quantile extrême avec un modèle coûteux	Convergence assez rapide	Identification d'un modèle simplifié suffisamment corrélé au modèle coûteux

Références

- [1] G. Saporta, *Probabilités, analyses des données et statistiques (2nd ed.)*. Editions Technip, 2006.
- [2] B. Jannet, “Influence de la non-stationnarité du milieu de propagation sur le processus de Retournement Temporel (RT),” Ph.D. dissertation, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 2014.
- [3] B. Sudret, *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models – Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*, Habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, Oct. 2007.
- [4] M. D. McKay, R. J. Beckman, and W. J. Conover, “Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code,” *Technometrics*, vol. 21, no. 2, pp. 239–245, 1979.
- [5] G. Matheron, “Principles of geostatistics,” *Economic geology*, vol. 58, no. 8, pp. 1246–1266, 1963.
- [6] D. R. Jones, M. Schonlau, and W. J. Welch, “Efficient global optimization of expensive black-box functions,” *Journal of Global optimization*, vol. 13, no. 4, pp. 455–492, 1998.
- [7] C. Lataniotis, S. Marelli, and B. Sudret, “UQLab user manual - Kriging (Gaussian process modelling),” Chair of Risk, Safety & Uncertainty Quantification, ETH Zurich, Tech. Rep. UQLab-V0.9-105, 2015.
- [8] F. Paladian, P. Bonnet, and S. Lallechere, “Modeling complex systems for EMC applications by considering uncertainties,” in *General Assembly and Scientific Symposium, 2011 XXXth URSI*, Aug 2011, pp. 1–4.
- [9] C. Chauvière, J. S. Hesthaven, and L. Lurati, “Computational modeling of uncertainty in time-domain electromagnetics,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 28, no. 2, pp. 751–775, 2006.
- [10] F. Diouf, F. Paladian, M. Fogli, C. Chauvière, and P. Bonnet, “Emission in reverberation chamber : numerical evaluation of the total power radiated by a wire with a stochastic collocation method,” in *Electromagnetic Compatibility, 2007. EMC Zurich 2007. 18th International Zurich Symposium on*, Sep. 2007, pp. 99–102.
- [11] H. Bağcı, A. Yucel, J. Hesthaven, and E. Michielssen, “A fast stroud-based collocation method for statistically characterizing emi/emc phenomena on complex platforms,” *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, vol. 51, no. 2, pp. 301–311, May 2009.
- [12] J. Silly-Carette, D. Lautru, M.-F. Wong, A. Gati, J. Wiart, and V. Fouad Hanna, “Variability on the propagation of a plane wave using stochastic collocation methods in a bio electromagnetic application,” *IEEE microwave and wireless components letters*, vol. 19, no. 4, pp. 185–187, 2009.
- [13] S. Lallechere, P. Bonnet, I. El Baba, and F. Paladian, “Unscented transform and stochastic collocation methods for stochastic electromagnetic compatibility,” in *Computational Electromagnetics International Workshop (CEM)*, 2011, Aug. 2011, pp. 24–29.
- [14] P. Bonnet, S. Girard, S. Lalléchère, F. Paladian, and B. Pecqueux, “Mise en Oeuvre Expérimentale de Méthodes Stochastiques sur un Problème de C.E.M,” *16ème édition du Colloque International sur la Compatibilité ElectroMagnétique*, 2012.
- [15] P. Bonnet, C. Chauvière, and S. Lalléchère, “Prise en compte de l’incertain pour les couplages électromagnétiques,” Tech. Rep. *REI PRINCE* n°07.c0044, DGA, 2009.
- [16] B. Jannet, P. Bonnet, S. Lalléchère, and B. Pecqueux, “Approche stochastique pour la prise en compte des incertitudes en Retournement Temporel,” *16ème édition du Colloque International sur la Compatibilité ElectroMagnétique*, 2012.
- [17] L. De Menezes, A. Ajayi, C. Christopoulos, P. Sewell, and G. Borges, “Efficient computation of stochastic electromagnetic problems using unscented transforms,” *Science, Measurement Technology, IET*, vol. 2, no. 2, pp. 88–95, Mar. 2008.
- [18] H. Tarhini, C. Guiffaut, A. Reineix, S. K. Karam, B. Pecqueux, and J.-C. Joly, “Etude paramétrique de la susceptibilité des cartes électroniques par les plans d’expériences numériques,” in *14ème Colloque International et Exposition sur la Compatibilité Electromagnétique et Journées Scientifiques d’URSI France-CEM 2008-CNFRS/URSI*.
- [19] H. Tarhini, “Etude de la susceptibilité des cartes des circuits imprimés face aux agressions électromagnétiques de fortes puissances,” Ph.D. dissertation, Université de Limoges, 2008.
- [20] F. Canavero and P. Manfredi, “Polynomial chaos for random field coupling to transmission lines,” *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 54, no. 3, pp. 677–680, 2012.
- [21] P. Manfredi and F. Canavero, “Numerical calculation of polynomial chaos coefficients for stochastic per-unit-length parameters of circular conductors,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 50, no. 3, pp. 74–82, Mar. 2014.
- [22] P. Kersaudy, S. Mostarshedi, B. Sudret, O. Picon, and J. Wiart, “Stochastic analysis of scattered field

- by building facades using polynomial chaos,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 62, no. 12, pp. 6382–6393, Dec. 2014.
- [23] S. Mostarshedi, B. Sudret, E. Richalot, J. Wiart, and O. Picon, “Multivariate uncertainty analysis of scattered electric field from building facades in urban environment,” in *Advanced Electromagnetics Symposium*, 2012, p. 5.
 - [24] P. Manfredi and F. Canavero, “Polynomial chaos-based tolerance analysis of microwave planar guiding structures,” in *Microwave Symposium Digest (MTT), 2011 IEEE MTT-S International*, June 2011, pp. 1–1.
 - [25] P. Manfredi, I. Stievano, and F. Canavero, “Alternative spice implementation of circuit uncertainties based on orthogonal polynomials,” in *Electrical Performance of Electronic Packaging and Systems (EPEPS), 2011 IEEE 20th Conference on*, Oct 2011, pp. 41–44.
 - [26] P. Manfredi, D. Vande Ginste, D. De Zutter, and F. Canavero, “Stochastic modeling of nonlinear circuits via spice-compatible spectral equivalents,” *Circuits and Systems I : Regular Papers, IEEE Transactions on*, vol. 61, no. 7, pp. 2057–2065, July 2014.
 - [27] V. Rannou, F. Brouaye, M. Hélier, and W. Tabbara, “Coupling of the field radiated by a mobile phone to a transmission line : a simple statistical and probabilistic approach,” in *14th International Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility, Proceedings*, 2001, pp. 109–112.
 - [28] O. Jawad, D. Lautru, J.-M. Dricot, F. Horlin, A. Benlarbi-Delai, and P. De Doncker, “Estimation of specific absorption rate with kriging method,” in *Radio Science Meeting (Joint with AP-S Symposium), 2013 USNC-URSI*, July 2013, pp. 29–29.
 - [29] C. Kasmi, M. Hélier, M. Darces, and E. Prouff, “Generalised pareto distribution for extreme value modelling in electromagnetic compatibility,” *Electronics Letters*, vol. 49, no. 5, pp. 334–335, Feb. 2013.
 - [30] —, “Modeling extreme values resulting from compromising electromagnetic emanations generated by an information system,” *Comptes Rendus Physique*, Apr. 2014.
 - [31] T. Bdour and A. Reineix, “Statistical estimation of maximum electric field in electrically large cavity using extreme value theory,” in *Electromagnetic Compatibility (EMC), 2015 IEEE International Symposium on*, Aug. 2015, pp. 1426–1429.
 - [32] J. Wiart, E. Conil, A. Hadjem, M. Jala, P. Kersaudy, and N. Varsier, “Handle variability in numerical exposure assessment : The challenge of the stochastic dosimetry,” in *Antennas and Propagation (EuCAP), 2013 7th European Conference on*, April 2013, pp. 1979–1981.
 - [33] A. Ghanmi, Y. Pinto, A. Hadjem, E. Conil, A. Gati, O. Picon, and J. Wiart, “Analysis of the influence of the position of the mobile on sar induced using polynomial chaos decomposition,” in *General Assembly and Scientific Symposium, 2011 XXXth URSI*, Aug 2011, pp. 1–4.
 - [34] A. Ghanmi, Y. Pinto, A. Hadjem, E. Conil, J. Wiart, and O. Picon, “Uncertainty propagation in the sar induced in the head using polynomial chaos decomposition,” in *Mediterranean Microwave Symposium (MMS), 2011 11th*, Sept 2011, pp. 73–76.
 - [35] P. Bonnet, C. Chauviere, S. Lalléchère, F. Paladian, and B. Pecqueux, “Recherche de configurations critiques pour un probleme de CEM stochastique,” in *Proc. 15th Int. Symp. on EMC, Limoges, France*, 2010.
 - [36] F. Sabath and H. Garbe, “Concept of stochastic modeling for high-power electromagnetics (hpem) risk analysis at system level,” in *Electromagnetic Compatibility (EMC), 2013 IEEE International Symposium on*, Aug 2013, pp. 401–406.
 - [37] E. Genender, A. Kreth, D. Zamow, H. Garbe, and S. Potthast, “Combination of the failure probability with a random angle of incidence of the radiated interference,” in *General Assembly and Scientific Symposium, 2011 XXXth URSI*, Aug. 2011, pp. 1–4.
 - [38] E. Genender, H. Garbe, and F. Sabath, “Probabilistic risk analysis technique of intentional electromagnetic interference at system level,” *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, vol. 56, no. 1, pp. 200–207, Feb 2014.
 - [39] I. Stievano, P. Manfredi, and F. Canavero, “Stochastic analysis of multiconductor cables and interconnects,” *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, vol. 53, no. 2, pp. 501–507, May 2011.
 - [40] F. Grassi and S. Pignari, “Immunity to conducted noise of data transmission along dc power lines involving twisted-wire pairs above ground,” *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, vol. 55, no. 1, pp. 195–207, Feb 2013.
 - [41] G. Spadacini, F. Grassi, and S. Pignari, “Statistical estimation of the electromagnetic noise induced by field-to-wire coupling in random bundles of twisted-wire pairs,” in *Electromagnetic Compatibility (APEMC), 2015 Asia-Pacific Symposium on*, May 2015, pp. 661–664.
 - [42] I. M. Sobol, “On sensitivity estimation for nonlinear mathematical models,” *Matematicheskoe Modeliro-*

- vanie*, vol. 2, no. 1, pp. 112–118, 1990.
- [43] B. Iooss, “Revue sur l’analyse de sensibilité globale de modèles numériques,” *Journal de la Société Française de Statistique*, vol. 152, no. 1, pp. 3–25, 2011.
- [44] T. Homma and A. Saltelli, “Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models,” *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 52, no. 1, pp. 1–17, 1996.
- [45] E. Johnson, H. Lam, L. Katafygiotis, and J. Beck, “Phase I IASC-ASCE structural health monitoring benchmark problem using simulated data,” *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 130, no. 1, pp. 3–15, 2004.
- [46] H. Lam, L. Katafygiotis, and N. Mickleborough, “Application of a statistical model updating approach on phase I of the IASC-ASCE structural health monitoring benchmark study,” *Journal of engineering mechanics*, vol. 130, no. 1, pp. 34–48, 2004.
- [47] W. Hastings, “Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their application,” *Biometrika*, vol. 57, no. 1, pp. 97–109, 1970.
- [48] P. Müller, “A generic approach to posterior integration and gibbs sampling,” 1991.
- [49] A. Tarantola, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), 2005.
- [50] F. Perrin, “Prise en compte des données expérimentales dans les modèles probabilistes pour la prévision de la durée de vie des structures,” Ph.D. dissertation, Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II, 2008.
- [51] O. Ditlevsen and H. Madsen, *Structural Reliability Methods*. John Wiley & Sons Inc, 1996.
- [52] M. Lemaire, A. Chateauneuf, and J.-C. Mitteau, *Fiabilité des structures : Couplage mécano-fiabiliste statique*. Hermès Science Publications, 2005.
- [53] A. Kouassi, J.-M. Bourinet, S. Lalléchère, P. Bonnet, and M. Fogli, “Fiabilité de fonctionnement et sensibilité CEM pour un problème de ligne de transmission,” *17ème Colloque International et Exposition sur la Compatibilité Electromagnétique*, 2014.
- [54] S.-K. Au and J. Beck, “Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 16, no. 4, pp. 263–277, Oct. 2001.
- [55] C. Cannamela, J. Garnier, and B. Iooss, “Controlled stratification for quantile estimation,” *The Annals of Applied Statistics*, vol. 2, no. 4, pp. 1554–1580, June 2008.

Deuxième partie

Analyse de risque d'interférence électromagnétique

Probabilité de défaillance et analyse de sensibilité par méthodes de fiabilité appliquées au calcul d'interférences électromagnétiques extrêmes

4.1 Introduction

Depuis quelques années, de nombreuses approches statistiques ont été introduites en CEM. Cela semble naturel lorsque l'on s'intéresse à des problèmes physiques dépendant de nombreuses variables incertaines conditionnant les niveaux d'interférences. Le développement de ces techniques statistiques dans le domaine de la CEM a permis par exemple d'estimer l'espérance et l'écart-type d'une réponse d'intérêt qui dépend de différentes variables aléatoires [1–4].

Quelques travaux seulement traitent de l'estimation de valeurs extrêmes dans un contexte CEM [5–9]. Cependant, ce type d'approche est assez pertinent pour effectuer une analyse de risque. Un cas typique serait la détection d'un défaut d'un équipement électronique connecté en bout de câble lorsqu'il est illuminé par un champ électromagnétique [9, 10].

Par ailleurs, un tel équipement électronique peut différer de l'un à l'autre pour des raisons liées au processus de fabrication. Dans ce cas, un ensemble d'équipements serait alors idéalement représenté par une densité de probabilité de défaillance dépendant, par exemple, du niveau de courant appliqué à son entrée. Ainsi, une analyse fiabiliste d'un système CEM doit prendre en compte la probabilité que le courant interférent (ou autre grandeur pertinente) atteigne une certaine valeur ainsi que la probabilité que l'équipement électronique soit en état de défaillance pour cette valeur spécifique d'amplitude de courant.

Dans ce chapitre, nous introduisons d'abord les outils d'*analyse de fiabilité* (issus de la mécanique probabiliste [11, 12]) permettant d'estimer une *probabilité de défaillance* notée P_f définie comme la probabilité de dépassement d'une valeur de seuil limite. Nous fournissons ensuite des facteurs indiquant la sensibilité de la probabilité de défaillance par rapport aux paramètres d'entrée du phénomène physique considéré. Enfin, dans la section 4.3, nous appliquons ces outils pour l'analyse de risque d'un défaut CEM en prenant en compte des incertitudes sur les paramètres d'entrée influençant les niveaux d'interférence d'un simple problème de diaphonie d'une ligne de transmission à deux fils conducteurs.

4.2 Méthodes pour l'analyse de fiabilité

En raison du manque de connaissance des valeurs prises par certains paramètres d'entrée d'un ensemble d'équations, l'analyste est contraint d'utiliser une modélisation statistique par l'intermédiaire de variables aléatoires décrivant l'information disponible sur la distribution des paramètres d'entrée. Ainsi, la réponse d'un modèle numérique (i.e. représentant un phénomène physique) devient alors incertaine. Le but de l'analyse de fiabilité consiste à déterminer la probabilité de défaillance d'un système et à fournir une hiérarchisation des paramètres d'entrée (*analyse de sensibilité*). Ceci est basé sur la définition d'une fonction d'état-limite, qui est maintenant introduite [13].

4.2.1 Fonction d'état-limite

Soit un vecteur aléatoire \mathbf{X} de taille M (contenant M variables aléatoires) décrivant les incertitudes identifiées sur les entrées du modèle. L'évaluation de la fiabilité d'un système repose sur la fonction d'état-limite g dépendant du vecteur aléatoire d'entrée \mathbf{X} définie par :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{X} &\longrightarrow y_S - \mathcal{M}(\mathbf{X}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

où \mathcal{M} est le modèle de simulation numérique utilisé pour représenter le phénomène d'intérêt et y_S est un seuil déterminé. La fonction d'état-limite g est formulée de telle sorte que :

1. $D_f = \{\mathbf{x}; g(\mathbf{x}) \leq 0\}$ définit le *domaine de défaillance* du système ;
2. $D_s = \{\mathbf{x}; g(\mathbf{x}) > 0\}$ définit le *domaine de sûreté* ;
3. $\partial D = \{\mathbf{x}; g(\mathbf{x}) = 0\}$ est la *surface d'état-limite*.

En notant par $f_{\mathbf{X}}$ la fonction de densité de probabilité (pdf) du vecteur aléatoire \mathbf{X} , la probabilité de défaillance P_f d'un système s'écrit alors :

$$P_f = \mathbb{P}(g(\mathbf{x}) \leq 0) = \int_{D_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4.2)$$

En général, l'intégrale définie en 4.2 doit être résolue en employant des méthodes numériques telles que la simulation de Monte Carlo (MC) dont la convergence est lente. Cela nécessite alors de nombreuses évaluations de la fonction d'état-limite g , et par conséquent, du modèle numérique \mathcal{M} . Pour contourner cette difficulté, des méthodes d'approximation pour l'analyse de fiabilité [11, 12] ont été développées pour estimer la probabilité de défaillance à un coût de calcul relativement faible par rapport à la méthode de simulation par MC. Ces méthodes sont basées sur l'identification du *point de conception* qui est maintenant présentée.

4.2.2 Transformation de l'espace des variables d'entrée et définition du point de conception

Le principe des méthodes fiabilistes est basé sur la transformation du problème décrit dans l'espace des variables physiques, vers l'espace des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes.

Pour identifier le point de conception, la première étape consiste à réécrire l'intégrale 4.2 dans l'espace gaussien standard en ayant recours à une transformation isoprobabiliste

$T : \mathbf{X} \rightarrow \boldsymbol{\xi}$, où $\boldsymbol{\xi}$ est le vecteur aléatoire des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites. Différentes transformations (e.g. transformation de Rosenblatt ou Nataf [11, 12]) ont été proposées pour la transformation probabiliste des variables aléatoires d'entrée physiques. La transformation de Rosenblatt est appliquée lorsque la distribution de probabilité jointe est connue (information riche mais rarement disponible) tandis que la transformation de Nataf nécessite seulement la connaissance des distributions marginales des variables d'entrée et leurs corrélations (une information pauvre mais généralement disponible). Une fois que la transformation de Rosenblatt ou Nataf est appliquée, les variables aléatoires gaussiennes centrées réduites sont ensuite transformées en des variables aléatoires *indépendantes* par des techniques de décorrélation [12]. Ainsi, l'équation 4.2 est reformulée dans l'espace des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes comme suit :

$$P_f = \int_{g(T^{-1}(\boldsymbol{\xi})) \leq 0} \phi_M(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \int_{G(\boldsymbol{\xi}) \leq 0} \phi_M(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 \dots d\xi_M, \quad (4.3)$$

où $G(\boldsymbol{\xi}) = g(T^{-1}(\boldsymbol{\xi}))$ et ϕ_M est la pdf multi-gaussienne standard. Cette pdf est maximale à l'origine et décroît exponentiellement avec le terme $\|\boldsymbol{\xi}\|^2$. Pour cette raison, les points ayant la contribution la plus significative dans l'intégrale 4.3 sont ceux du domaine de défaillance qui sont les plus proches de l'origine de l'espace gaussien standard.

La seconde étape de la méthode est d'identifier le point de conception $\boldsymbol{\xi}^*$ (i.e. le point de défaillance le plus probable), qui est le point de défaillance du domaine le plus proche de l'origine dans l'espace gaussien standard. Ce point est la solution du problème d'optimisation sous contraintes :

$$P^* = \boldsymbol{\xi}^* = \text{Arg} \min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^M} \{ \|\boldsymbol{\xi}\|^2 : G(\boldsymbol{\xi}) \leq 0 \}. \quad (4.4)$$

Différents algorithmes peuvent être utilisés pour résoudre le problème d'optimisation 4.4 tels que l'algorithme d'Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HLRF) que nous présentons maintenant.

4.2.3 Algorithme de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HLRF)

L'algorithme de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HLRF) [14, 15] est un algorithme d'optimisation du premier ordre pour déterminer le point de conception. Il est très efficace même si sa convergence n'est pas assurée dans tous les cas. Dans cette section, nous présentons le principe de l'algorithme HLRF illustré sur la figure 4.1.

Pour identifier le point de conception $\boldsymbol{\xi}^*$, nous nous plaçons en un point $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$, point de départ à l'itération (k) . Ce point ne vérifie pas forcément la contrainte, i.e. $G(\boldsymbol{\xi})$ peut être non nulle. Le développement en série de Taylor au voisinage de ce point est :

$$G(\boldsymbol{\xi}) = G(\boldsymbol{\xi}^{(k)}) + \nabla G(\boldsymbol{\xi}^{(k)})^T \cdot (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^{(k)}) + O^2.$$

Cela donne l'équation de l'hyperplan tangent à $G(\boldsymbol{\xi})$ en $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$:

$$\nabla G(\boldsymbol{\xi}^{(k)})^T \cdot \boldsymbol{\xi} + b = 0.$$

On écrit maintenant que le point $\boldsymbol{\xi}^{(k+1)}$ doit vérifier la contrainte :

$$G(\boldsymbol{\xi}^{(k+1)}) = G(\boldsymbol{\xi}^{(k)}) + \nabla G(\boldsymbol{\xi}^{(k)})^T \cdot (\boldsymbol{\xi}^{(k+1)} - \boldsymbol{\xi}^{(k)}) = 0. \quad (4.5)$$

Nous divisons cette relation par la norme $\|\nabla G(\boldsymbol{\xi}^{(k)})\|$ et nous introduisons le vecteur des cosinus directeurs $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\nabla G(\boldsymbol{\xi})}{\|\nabla G(\boldsymbol{\xi})\|}, \quad (4.6)$$

nous obtenons l'état-limite 4.5 sous la forme :

$$\frac{G(\boldsymbol{\xi}^{(k)})}{\|\nabla G(\boldsymbol{\xi}^{(k)})\|} - (\boldsymbol{\alpha}^{(k)})^T \cdot (\boldsymbol{\xi}^{(k+1)} - \boldsymbol{\xi}^{(k)}) = 0$$

ou comme :

$$\frac{G(\boldsymbol{\xi}^{(k)})}{\|\nabla G(\boldsymbol{\xi}^{(k)})\|} - (\boldsymbol{\xi}^{(k+1)} - \boldsymbol{\xi}^{(k)})^T \cdot (\boldsymbol{\alpha}^{(k)}) = 0$$

On obtient alors :

$$(\boldsymbol{\xi}^{(k+1)})^T \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(k)} = (\boldsymbol{\xi}^{(k)})^T \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(k)} + \frac{G(\boldsymbol{\xi}^{(k)})}{\|\nabla G(\boldsymbol{\xi}^{(k)})\|}. \quad (4.7)$$

A l'itération (k) , on pose :

$$\boldsymbol{\xi}^{(k+1)} = \beta^{(k)} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(k)} \implies \beta^{(k)} = (\boldsymbol{\xi}^{(k+1)})^T \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(k)}, \quad (4.8)$$

où $\beta^{(k)}$ est la distance entre l'origine et le point $\boldsymbol{\xi}^{(k+1)}$.

Cela mène à la relation itérative donnant l'*indice de fiabilité* de HLRF :

$$\beta^{(k)} = \left((\boldsymbol{\xi}^{(k)})^T \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(k)} \right) + \frac{G(\boldsymbol{\xi}^{(k)})}{\|\nabla G(\boldsymbol{\xi}^{(k)})\|}. \quad (4.9)$$

Cette formulation constitue l'algorithme initial HLRF.

Interprétation physique

L'itération de l'algorithme HLRF peut se réécrire au point $\boldsymbol{\xi}^{(k+1)}$ en introduisant l'équation 4.9 dans 4.8 comme suit :

$$\boldsymbol{\xi}^{(k+1)} = \left((\boldsymbol{\xi}^{(k)})^T \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(k)} \right) \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(k)} + \frac{G(\boldsymbol{\xi}^{(k)})}{\|\nabla G(\boldsymbol{\xi}^{(k)})\|} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(k)}. \quad (4.10)$$

L'équation 4.10 est composée de 2 termes :

- Le premier projette $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$ en $\boldsymbol{\xi}^{(k')}$ (voir Fig. 4.1) sur la direction normale $\boldsymbol{\alpha}^{(k)}$ passant par l'origine : le terme $\left((\boldsymbol{\xi}^{(k)})^T \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(k)} \right) \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(k)}$ de l'expression 4.10 ;
- le deuxième terme projette $\boldsymbol{\xi}^{(k')}$ en $\boldsymbol{\xi}^{(k+1)}$: partie $\frac{G(\boldsymbol{\xi}^{(k)})}{\|\nabla G(\boldsymbol{\xi}^{(k)})\|} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(k)}$ de la relation 4.10.

Résumé de l'algorithme

L'algorithme peut être résumé par les étapes suivantes :

1. choisir un point de départ $\xi^{(0)}$, le point choisi à l'itération $k = 0$ est généralement l'origine de l'espace gaussien standard (en l'absence d'informations particulières) ;
2. évaluer la fonction d'état-limite $G(\xi^{(k)})$;
3. calculer le gradient de l'état-limite $\nabla G(\xi)^{(k)}$ et sa norme $\|\nabla G(\xi)^{(k)}\|$, et en déduire $\alpha^{(k)}$ par 4.6 ;
4. calculer $\beta^{(k)}$ par la relation 4.9 ;
5. calculer $\xi^{(k+1)}$ par la relation 4.8 ;
6. si $\|\xi^{(k+1)} - \xi^{(k)}\| \leq \epsilon$ arrêter le calcul, sinon k devient $k + 1$ et aller en 2.

Nous vérifions après convergence, que $\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)}$ et $G(\xi^{(k)}) = 0$. L'algorithme est arrêté selon le critère de la norme du vecteur, e.g. $\|\xi^{(k+1)} - \xi^{(k)}\| \leq \epsilon$.

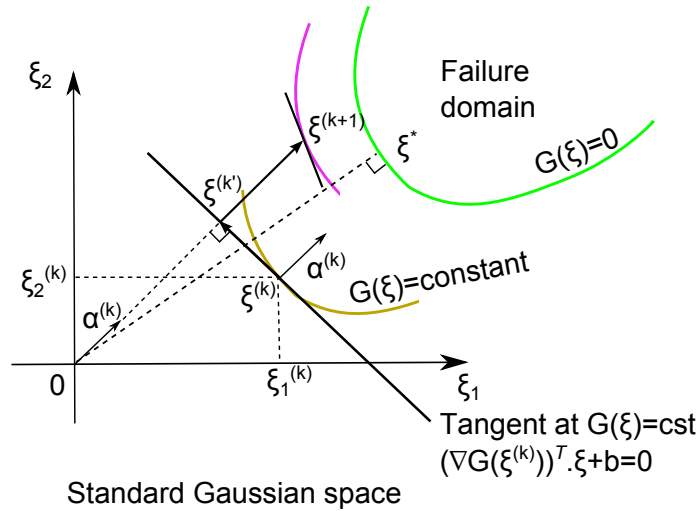


FIGURE 4.1 – Illustration de l'itération de l'algorithme HLRF [12].

L'équation 4.10 peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \xi^{(k+1)} &= \xi^{(k)} + \Delta^{(k)} d^{(k)} \\ &= \xi^{(k)} + \Delta^{(k)} \left[\left((\xi^{(k)})^T \cdot \alpha^{(k)} \right) \cdot \alpha^{(k)} + \frac{G(\xi^{(k)})}{\|\nabla G(\xi^{(k)})\|} \cdot \alpha^{(k)} - \xi^{(k)} \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

où $\Delta^{(k)}$ est le pas et $d^{(k)} = \left[\left((\xi^{(k)})^T \cdot \alpha^{(k)} \right) \cdot \alpha^{(k)} + \frac{G(\xi^{(k)})}{\|\nabla G(\xi^{(k)})\|} \cdot \alpha^{(k)} - \xi^{(k)} \right]$ est la direction de descente.

L'algorithme HLRF correspond au choix $\Delta^{(k)} = 1$. Cependant, la convergence globale de cette algorithme n'est pas assurée. Pour contourner cette difficulté, [16] a proposé une version améliorée de l'algorithme HLRF en ajustant le pas de descente $\Delta^{(k)}$ à chaque itération [12].

Après l'identification du point de conception, la troisième étape consiste à effectuer des développements en séries de la fonction d'état-limite en ce point. Ces techniques sont maintenant présentées.

4.2.4 Estimation de la probabilité de défaillance à partir du point de conception

4.2.4.1 Principe des approximations FORM et SORM

La méthode FORM (*first-order-reliability method*) effectue un développement en série de Taylor de la fonction d'état-limite G au voisinage du point de conception ξ^* pour calculer une approximation de 1^{er} ordre de la probabilité de défaillance. Cela consiste à remplacer le domaine de défaillance par le demi-espace défini par l'hyperplan tangent à la surface d'état-limite au voisinage du point de conception ξ^* (Fig. 4.2).

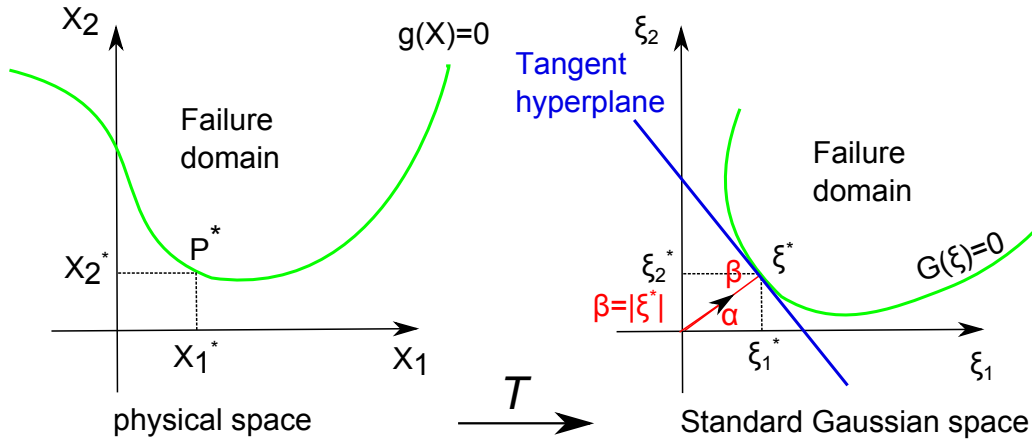


FIGURE 4.2 – Principe de l'approximation FORM : construction de l'hyperplan tangent au point de conception ξ^* .

L'équation de l'hyperplan noté \tilde{G} autour du point de conception ξ^* peut être recherchée comme suit [13] :

$$\begin{aligned}\tilde{G}(\xi) &= G(\xi^*) + \nabla G(\xi^*)^T \cdot (\xi - \xi^*) \\ &= \frac{\nabla G(\xi^*)^T}{\|\nabla G(\xi^*)\|} \cdot (\xi - \xi^*) = -\alpha^T \cdot (\xi - \xi^*) \\ &= \beta - \alpha^T \cdot \xi = 0,\end{aligned}\tag{4.12}$$

où β est l'indice de fiabilité et les composantes du vecteur unitaire $\alpha = -\frac{\nabla G(\xi^*)}{\|\nabla G(\xi^*)\|}$ sont les cosinus directeurs du vecteur gradient au point de conception. De plus, l'équation 4.12 a été obtenue à partir de $G(\xi^*) = 0$ (car ξ^* est sur la surface d'état-limite ∂D), et en normalisant la fonction d'état-limite par $\|\nabla G(\xi^*)\|$.

Ainsi, l'approximation au 1^{er} ordre de P_f s'écrit alors comme :

$$P_f = \int_{G(\xi) \leq 0} \phi_M(\xi) d\xi \approx \int_{Hyp(\xi^*)} \phi_M(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_M.\tag{4.13}$$

En partant du postulat que les variables aléatoires gaussiennes sont indépendantes, il est possible de démontrer que la solution de l'intégrale 4.13 est donnée par [11, 12] :

$$P_f \approx P_{f, \text{FORM}} = \Phi(-\beta),\tag{4.14}$$

où β est l'indice de fiabilité, et Φ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite unidimensionnelle.

Cependant, l'approximation 4.13 peut être insuffisante. De ce fait, la méthode SORM (*second-order-reliability-method*) a été proposée pour effectuer une approximation d'ordre 2 de la probabilité de défaillance. Elle consiste à substituer la surface d'état-limite par une hyper-surface d'ordre 2 autour du point de conception ξ^* . L'idée est basée sur le calcul de la matrice Hessienne de la fonction d'état-limite autour du point de conception ξ^* . En utilisant une rotation du système de coordonnées dans l'espace gaussien standard (i.e. $\mathbf{v} = \mathbf{R} \cdot \xi$), la fonction d'état-limite peut être réécrite comme [13] :

$$G(\xi) \approx \beta - v_M + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{1}{2} \kappa_i v_i^2, \quad (4.15)$$

où v_M est la M -ème composante du vecteur de rotation \mathbf{v} et $\{\kappa_i, i = 1, \dots, M-1\}$ représente les courbures du paraboloïde approximé autour du point de conception. [17] a proposé la première formule asymptotique pour exprimer l'approximation de second ordre de la probabilité de défaillance, mais une amélioration a été apportée par [18] :

$$P_f \approx P_{f,\text{SORM}} = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{M-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\phi(\beta)}{\Phi(-\beta)} \kappa_i}} \quad (\beta \rightarrow \infty). \quad (4.16)$$

Nous remarquons ainsi que l'approximation SORM de la probabilité de défaillance donnée dans 4.16, propose de corriger le terme obtenu par l'approximation FORM dans 4.14.

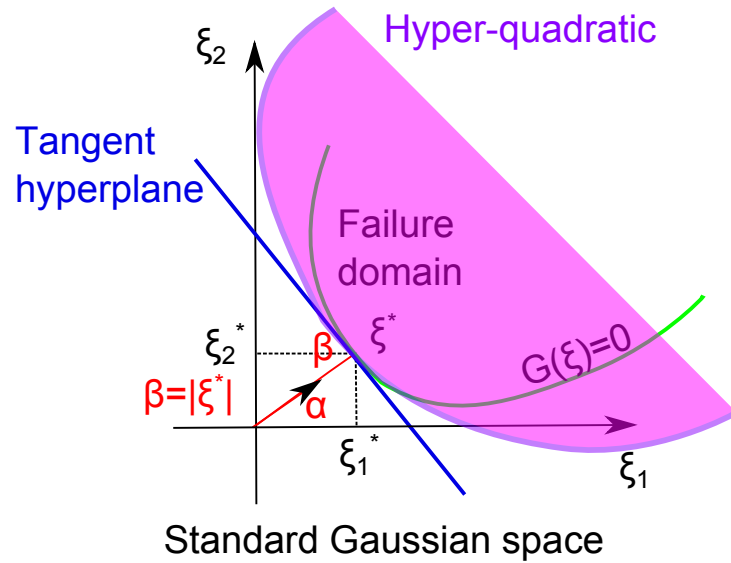


FIGURE 4.3 – Approximation SORM : construction d'une hyper-surface d'ordre 2 (i.e. paraboloïde) au point de conception ξ^* .

4.2.4.2 Importance sampling (IS)

Les approximations FORM-SORM de la probabilité de défaillance sont obtenues à un coût de calcul faible par rapport à la simulation de type MC. Par ailleurs, différents inconvénients peuvent être rencontrés lorsqu'un problème complexe est traité tels que :

- le point de conception ξ^* trouvé après résolution du problème d'optimisation 4.4 peut avoir été incorrectement identifié (i.e. ξ^* est un minimum local au lieu d'être un minimum global) ;
- La qualité des approximations de la probabilité de défaillance établies par 4.14 et 4.16 peut être insuffisante.

Afin de contourner ces limites, une approche complémentaire appelée *importance sampling* (IS) a été introduite [19]. Puisque le poids de P_f est principalement localisé autour du point de conception ξ^* , la méthode consiste à concentrer l'échantillonnage autour de ce point (Fig. 4.4) en sélectionnant une densité d'échantillonnage d'importance (*importance sampling density*, ISD) ψ [12]. En pratique, ψ peut être sélectionnée comme une densité gaussienne réduite de dimension M centrée autour du point de conception ξ^* , i.e. $\psi(\xi) = \phi_M(\xi - \xi^*)$.

La probabilité de défaillance P_f peut être réécrite comme :

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{\mathbb{R}^M} \mathbb{1}_{D_f} \phi_M(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^M} \mathbb{1}_{D_f} \frac{\phi_M(\xi)}{\psi(\xi)} \psi(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (4.17)$$

où $\mathbb{1}_{D_f}$ est la fonction indicatrice du domaine de défaillance prenant la valeur 1 dans le domaine de défaillance et 0 dans le domaine de sûreté. L'expression 4.17 peut être reformulée comme l'espérance $\mathbb{E}_\psi[\cdot]$ par rapport à la densité d'échantillonnage d'importance ψ :

$$P_f = \mathbb{E}_\psi \left[\mathbb{1}_{D_f} \frac{\phi_M(\xi)}{\psi(\xi)} \right]. \quad (4.18)$$

Un estimateur de P_f est alors fourni par simulation de MC (voir Fig. 2) :

$$P_{f,IS} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{D_f}^{(k)} \frac{\phi_M(\xi^{(k)})}{\psi(\xi^{(k)})}, \quad (4.19)$$

où l'échantillon $\{\xi^{(k)}, k = 1, \dots, N\}$ est maintenant tiré selon la densité d'échantillonnage ψ . Il est alors possible de fournir un estimateur de la variance de P_f :

$$\widehat{\text{Var}}[P_{f,IS}] \approx \frac{1}{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\mathbb{1}_{D_f}^{(k)} \left(\frac{\phi_M(\xi^{(k)})}{\psi(\xi^{(k)})} \right)^2 \right) - P_{f,IS}^2 \right). \quad (4.20)$$

4.2.5 Analyse de sensibilité locale

Une information supplémentaire appelée *facteurs d'importance* peut également être dérivée par l'analyse FORM introduite dans la section 4.2.4.1. L'intérêt de ces facteurs est de déterminer le poids de chaque variable d'entrée du modèle physique sur la probabilité de défaillance. Nous sommes alors intéressés par l'influence de chaque variable aléatoire sur la défaillance du système, mesurée par l'indice de fiabilité β autour du point de conception ξ^* .

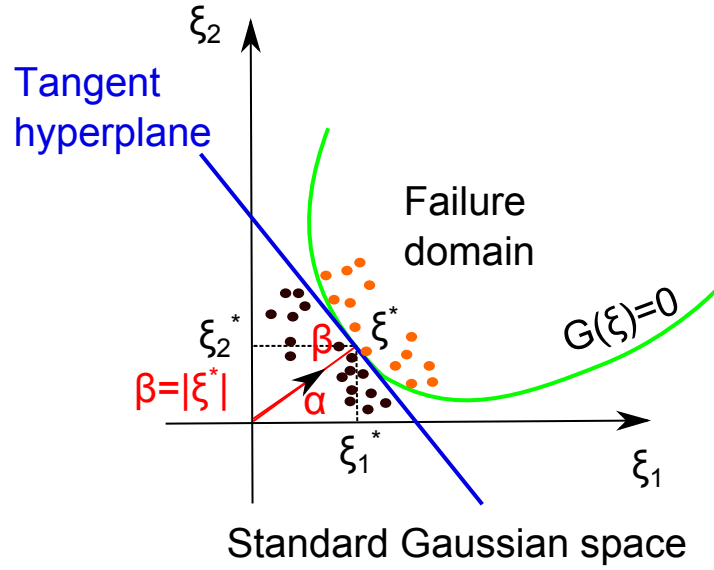


FIGURE 4.4 – Échantillonnage concentré autour du point de conception ξ^* .

4.2.5.1 Sensibilité de l'indice de fiabilité par rapport aux variables

A partir de la fonction d'état-limite linéarisée \tilde{G} calculée par FORM dans 4.12, nous remarquons que les cosinus directeurs de α représentent la sensibilité de l'indice de fiabilité β par rapport aux variables gaussiennes standard indépendantes comme :

$$\alpha = \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \Big|_{\xi^*}. \quad (4.21)$$

D'autre part, la variance de la fonction d'état-limite linéarisée \tilde{G} est définie par :

$$\text{Var}[\tilde{G}] = \alpha^T \cdot \text{Var}[\xi] \cdot \alpha. \quad (4.22)$$

En utilisant le fait que les variables gaussiennes standards ξ_i , $i = 1 \dots M$ soient indépendantes, i.e. $\text{Var}[\xi] = I_M$, où I_M est la matrice identité de taille M , et comme α est un vecteur unité, la variance de \tilde{G} devient :

$$\text{Var}[\tilde{G}] = \sum_{i=1}^M \alpha_i^2 = 1. \quad (4.23)$$

Cela signifie que les facteurs d'importance α_i^2 représentent la proportion de variance associée à la variable ξ_i . Lorsque les variables aléatoires d'entrée physiques sont indépendantes, chaque variable aléatoire physique X_i est associée à sa variable aléatoire gaussienne standard ξ_i . Dans ce cas, les coefficients α_i^2 fournissent directement une mesure d'importance de chaque variable aléatoire d'entrée physique X_i . Si les variables aléatoires d'entrée physiques sont corrélées, le vecteur d'importance γ utilisant le Jacobien de la transformation probabiliste T a été introduit (voir [12] pour plus de détails).

4.2.5.2 Sensibilité de l'indice de fiabilité aux paramètres des distributions de probabilité

Outre la sensibilité de l'indice de fiabilité β aux variables aléatoires d'entrée, la sensibilité de β par rapport aux paramètres des distributions de probabilité (espérance, écart-type...) de ces mêmes variables aléatoires peut être obtenue. Cependant, les sensibilités obtenues en dérivant β par rapport aux paramètres des lois de distribution ne permettent pas une comparaison d'importance entre les paramètres des lois de distribution. Pour surmonter cette difficulté, une normalisation des sensibilités est effectuée pour obtenir les élasticités des paramètres définies par :

$$\epsilon_{p_{i\lambda}} = \frac{p_{i\lambda}}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial p_{i\lambda}} \bigg|_{\xi^*}, \quad (4.24)$$

où $p_{i\lambda}$ est le paramètre de λ -ème distribution de la variable X_i , $i = 1, \dots, M$. Il est à noter qu'une nouvelle fois, si les variables aléatoires d'entrée physiques X_i , $i = 1, \dots, M$ sont corrélées, la matrice Jacobienne de la transformation probabiliste T doit être introduite pour le calcul des paramètres d'élasticités (voir [12] pour plus de détails).

4.2.6 Estimation de la probabilité de défaillance en grandes dimensions : *subset simulation* (SS)

Dans l'analyse de fiabilité, les méthodes FORM, SORM et IS sont des outils classiques permettant à l'ingénieur de résoudre le problème dans la plupart des cas [13]. Cependant, bien que ces techniques soient relativement robustes, lorsque la complexité du problème augmente (avec par exemple un grand nombre de paramètres d'entrée incertains) la construction d'une bonne densité d'échantillonnage d'importance peut être problématique [20]. Par conséquent, une nouvelle méthode de simulation appelée *subset simulation* (SS) a été développée par [20] pour estimer des probabilités de défaillance faibles en grandes dimensions.

Supposons que l'événement de défaillance D_f soit rare, l'approche introduite par [20], consiste à estimer la probabilité de défaillance P_f en introduisant des événements de défaillance conditionnels intermédiaires plus fréquents D_{f_i} , $i = 1, \dots, R$ appelés sous-ensembles, définis comme $D_{f_1} \supset D_{f_2} \supset \dots \supset D_{f_R} = D_f$. Les différents sous-ensembles intermédiaires sont définis par $D_{f_i} = \{g(\mathbf{x}) \leq t_i, i = 1, \dots, R\}$ où l'ensemble des seuils $\{t_i, i = 1, \dots, R\}$ constitue une suite décroissante avec $t_R = 0$. Ainsi, la probabilité de défaillance P_f est donnée par définition de la probabilité conditionnelle comme suit :

$$\begin{aligned} P_f &= \mathbb{P}(D_f) = \mathbb{P}(D_{f_R}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^R D_{f_i}\right) \\ &= \mathbb{P}(D_{f_R} \mid D_{f_{R-1}}) \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{R-1} D_{f_i}\right) \\ &= \dots = \mathbb{P}(D_{f_1}) \prod_{i=2}^R \mathbb{P}(D_{f_i} \mid D_{f_{i-1}}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Le principe de l'approche par SS est d'estimer la probabilité de défaillance P_f en estimant les quantités $\mathbb{P}(D_{f_1})$ et les probabilités conditionnelles $\{\mathbb{P}(D_{f_i} \mid D_{f_{i-1}}), i = 2, \dots, R\}$ [20]. L'estimation de ces quantités dépend en pratique des différents sous-ensembles D_{f_i} , $i = 1, \dots, R$ et leurs seuils associés t_i . Les seuils intermédiaires $\{t_i, i = 1, \dots, R\}$ doivent être choisis de manière à ce que les probabilités de défaillance conditionnelles intermédiaires ne soient pas trop

faibles pour être bien estimées. Une valeur de probabilité cible P_f^c doit être choisie en pratique (généralement $P_f^c \approx \{0.1, 0.2\}$ [20]). L'estimation du 1^{er} seuil t_1 est effectuée par simulation de MC où $\mathbb{P}(D_{f_1}) = P_f^c$ (cf. Fig. 4.5-a. et Fig. 4.5-b.). Les seuils suivants $\{t_i, i = 2, \dots, R\}$ associés aux événements de défaillance conditionnels $\{D_{f_i} | D_{f_{i-1}}\}, i = 2, \dots, R$ sont générés par simulation de Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC) basée sur une version modifiée de l'algorithme de Metropolis-Hastings (MH). Il en résulte les points verts sur la Fig. 4.5-d. lorsque $i = 2$, et les triangles violets sur la Fig. 4.5-f. pour $i = 3$) [20]. Cette technique est effectuée jusqu'à ce qu'un seuil négatif soit obtenu. Une fois que cette étape est atteinte, la surface d'état-limite recherchée $\{g(\mathbf{x}) = 0\}$ a été trouvée (i.e. ceci est l'étape R et le seuil négatif t_R prend la valeur 0). Enfin, la probabilité de défaillance conditionnelle $\{\mathbb{P}(D_{f_R} | D_{f_{R-1}})\}$ est estimée [20].

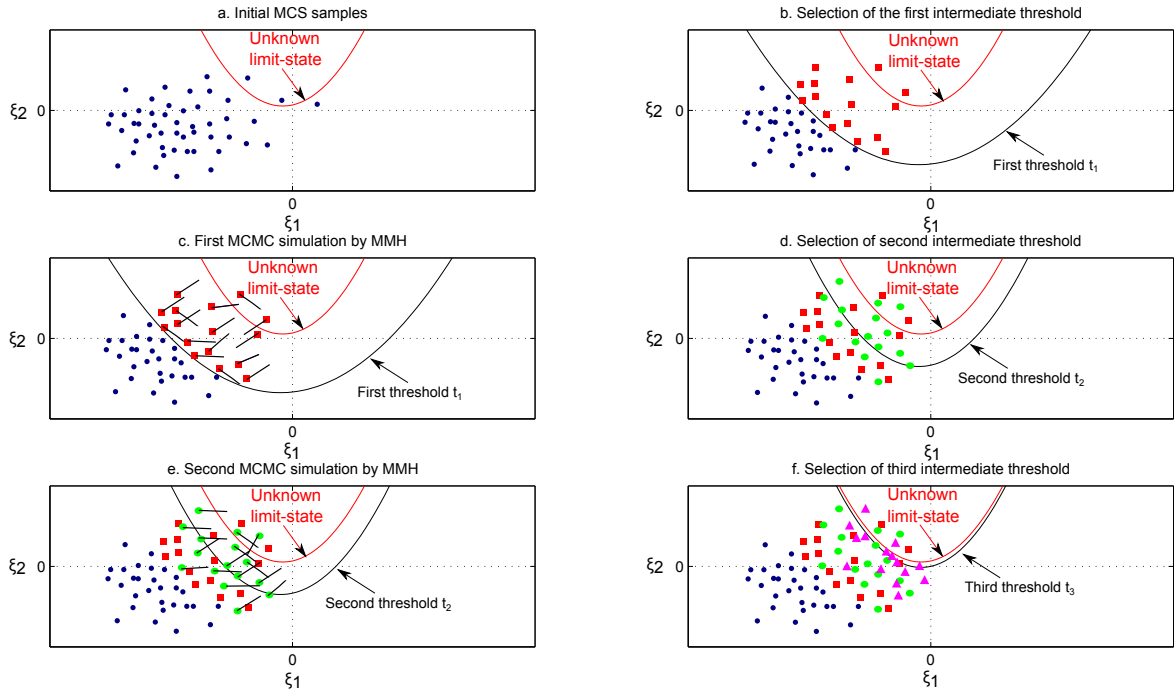


FIGURE 4.5 – La procédure de la méthode de subset simulation : (a) Niveau Conditionnel 1 : simulation de MC standard ; (b) Niveau Conditionnel 1 : sélection adaptative du 1^{er} seuil ; (c) Niveau Conditionnel 2 : simulation de MCMC ; (d) Niveau Conditionnel 2 : sélection adaptative du 2^{ème} seuil ; (e) Niveau Conditionnel 3 : simulation de MCMC ; (f) Niveau Conditionnel 3 : sélection adaptative du 3^{ème} et dernier seuil [20].

La section suivante a pour but d'utiliser ces techniques de fiabilité pour analyser un problème canonique de diaphonie dans le contexte des lignes de transmission.

4.3 Estimation et analyse de sensibilité de la probabilité de défaillance dans un problème de diaphonie

Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus avec la toolbox open-source FERUM 4.1 [21] (Finite Element Reliability Using Matlab®), couplée à un code de calcul

basé sur la théorie des lignes de transmission utilisant le formalisme de l'équation BLT (Baum-Liu-Tesche) [22, 23].

Pour étudier l'impact des incertitudes de paramètres d'entrée sur les interférences électromagnétiques [4], nous avons considéré un exemple très simple d'une ligne de transmission sans pertes à deux fils au-dessus d'un plan de masse parfaitement conducteur (PEC, Fig. 4.6). Le fil conducteur $n^{\circ}1$ est situé à une hauteur h_1 au-dessus du plan de masse en étant alimenté par une force électromotrice $e = 1$ V. Les deux impédances connectées aux extrémités sont notées R_1 et R_2 . Le fil conducteur $n^{\circ}2$ est lui, placé à une hauteur h_2 au-dessus du plan de masse, en étant relié à deux impédances résistives aux extrémités, notées R_3 et R_4 . Les deux fils conducteurs sont de même longueur, notée Lg . Nous nous sommes intéressés au courant induit par diaphonie à l'extrémité opposée sur le fil conducteur $n^{\circ}2$, noté $I_2(Lg)$, dépendant des aléas suivants :

- R_1 est une variable aléatoire distribuée uniformément entre 1Ω et 10Ω ;
- R_2 et R_3 sont des variables distribuées uniformément entre $10 \text{ k}\Omega$ et $100 \text{ k}\Omega$;
- h_1 et h_2 varient indépendamment l'une de l'autre avec un aléa uniforme entre $1,5 \text{ cm}$ et $2,5 \text{ cm}$;
- Lg est une variable aléatoire de distribution uniforme entre $9,5 \text{ m}$ et $10,5 \text{ m}$.

De plus, l'impédance R_4 est fixée à 10Ω , la distance d entre les deux fils est égale à 1 cm et le diamètre de chaque fil est 1 mm . L'objectif de l'étude est d'estimer une probabilité de défaillance P_f définie comme la probabilité que le maximum de courant induit évalué dans une bande de fréquence prédéfinie Δ_f excède un seuil noté I_t : $P_f = \mathbb{P}(\max_{\Delta_f} I_2(Lg) \geq I_t)$.

Afin de traiter des valeurs extrêmes de courant, nous avons choisi une bande de fréquence pour laquelle la ligne de transmission entre potentiellement en régime de résonance. En effet, compte tenu des domaines d'impédances choisis, la ligne de transmission entre en résonance aux alentours de $7,5 \text{ MHz}$ (quart de longueur d'onde). L'intérêt de ce type d'étude est d'adopter le point de vue d'un ingénieur CEM. En phase initiale de conception, il n'a qu'une très vague information sur les paramètres d'entrée de son système tels que les positions de câblage ou les impédances d'extrémités. Cependant, il doit s'assurer que le courant $I_2(Lg)$ ne risque pas d'engendrer un dysfonctionnement de l'équipement électronique connecté à l'extrémité du câble. D'autre part, il est également intéressé par les mesures préventives à prendre sur les paramètres d'entrée pour éviter la défaillance du système.

4.3.1 Analyse préliminaire des performances de la méthode FORM

4.3.1.1 Illustration de la méthode FORM sur un cas d'étude simplifié

Pour montrer les performances de l'analyse FORM, le problème de diaphonie présenté dans la section 4.3 a tout d'abord été simplifié. En effet, seules les impédances R_1 et R_2 (Fig. 4.6) ont été considérées comme variables aléatoires dans le problème simplifié avec les mêmes distributions de probabilité. Toutes les autres variables aléatoires de la configuration initiale sont fixées à leurs valeurs moyennes : $R_3 = 55 \text{ k}\Omega$, $h_1 = h_2 = 2 \text{ cm}$ et $Lg = 10 \text{ m}$.

Le but de ce problème de diaphonie simplifié est de mettre en évidence la bonne approximation de la probabilité de défaillance P_f établie par FORM et SORM, qui repose sur l'approximation de la fonction d'état-limite g . Ainsi, nous avons sélectionné un seuil arbitraire $I_t = 73 \text{ mA}$, et nous avons estimé $P_f = \mathbb{P}(\max_{\Delta_f} I_2(Lg) \geq I_t)$ par les analyses FORM et SORM. Les probabilités de défaillance $P_{f,\text{FORM}}$ et $P_{f,\text{SORM}}$ sont alors comparées à un résultat

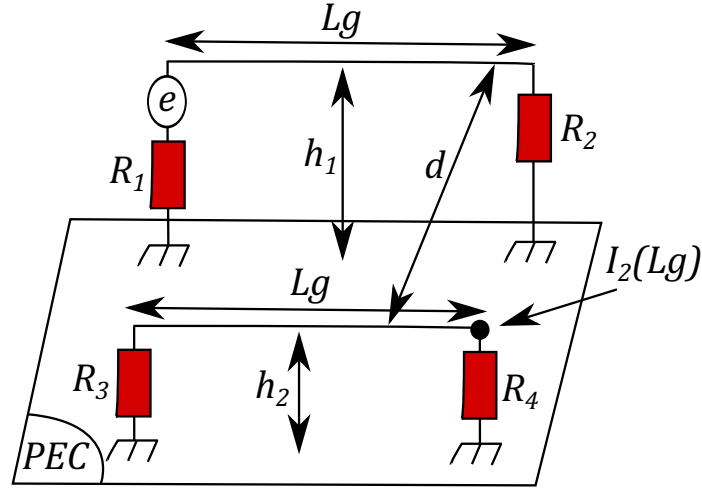
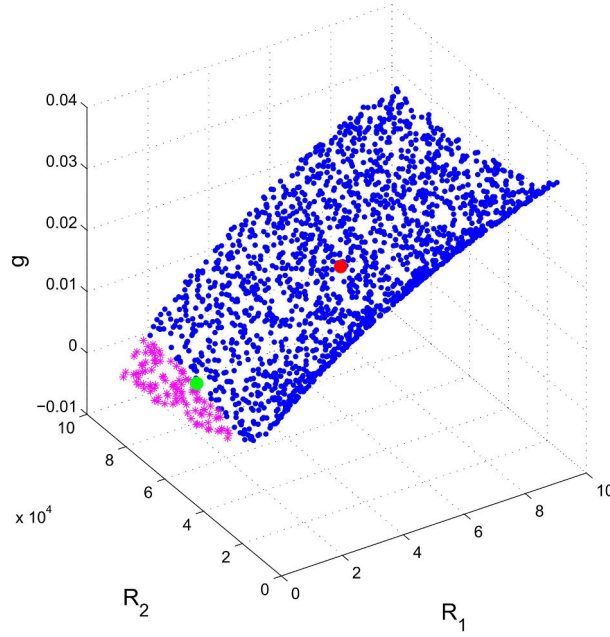


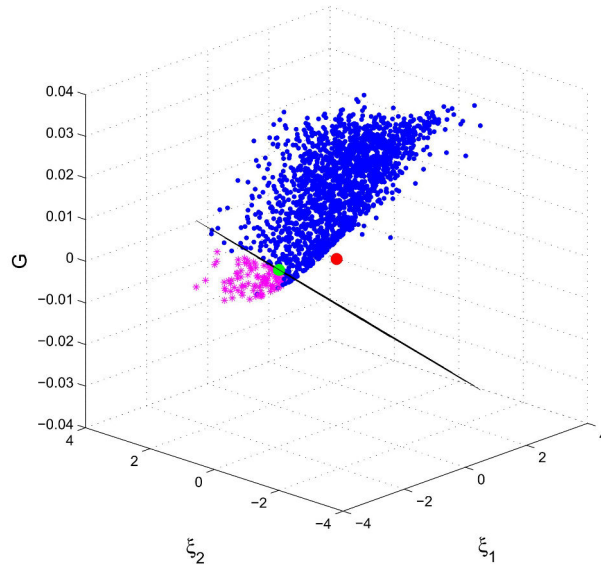
FIGURE 4.6 – Ligne de transmission à deux fils conducteurs au-dessus d'un plan de masse de type conducteur électrique parfait (PEC) avec des aléas uniformes sur : les impédances R_1 , R_2 , R_3 , les hauteurs h_1 , h_2 , et la longueurs des fils Lg .

de référence obtenu à l'aide de 10 000 réalisations par simulation de MC : $P_{f,MC} = 0,049 \pm 4 \%$. Il est à souligner que 10 000 réalisations par simulation de MC ont été effectuées pour atteindre un compromis entre coût de calcul et précision de l'estimation de P_f . Ainsi, l'approximation de la probabilité de défaillance obtenue par FORM est $P_{f,FORM} = 0,069$ en ayant recours à 106 appels au modèle numérique. Pour améliorer la précision de l'estimation effectuée par FORM, nous utilisons une approximation SORM fournissant $P_{f,SORM} = 0,049$ à l'aide de 5 appels supplémentaires au code de calcul. Le nombre d'appels au modèle est relativement faible car l'approximation SORM est effectuée une fois que le point de conception ξ^* a été identifié au préalable par FORM. Nous remarquons ainsi que les résultats fournis par ces méthodes sont assez satisfaisants dans la mesure où FORM donne une estimation relativement proche de la simulation de MC avec un grand nombre de tirages, tandis que SORM converge vers la même valeur de référence obtenue à partir de cette simulation de MC.

Afin de donner une visualisation de l'approximation de la probabilité de défaillance P_f calculée par la méthode FORM, nous avons représenté 2000 réalisations de la fonction d'état-limite g en fonction des impédances R_1 et R_2 dans l'espace physique (Fig. 4.7(a)) et dans l'espace gaussien (Fig. 4.7(b)). L'approximation de la fonction d'état-limite G par l'hyperplan FORM au point de conception ξ^* dans l'espace gaussien, est également illustrée sur la figure 4.7(b). Ainsi, nous observons que l'hyperplan tangent (en noir) établi par FORM au point de conception ξ^* (en vert) sépare les réalisations de la fonction d'état-limite G situées dans le domaine de défaillance (en magenta) et celles dans le domaine de sûreté (en bleu). La réalisation en rouge visible sur la figure 4.7(a) représente la moyenne du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = \{R_1, R_2\}$ dans l'espace physique qui est transformé en l'origine de l'espace gaussien standard sur la figure Fig. 4.7(b). Il apparaît ainsi relativement que l'hyperplan établi par FORM comptabilise à tort des réalisations qui figurent dans le domaine de sûreté. SORM à l'aide de 5 appels supplémentaires au code de calcul parvient donc à corriger cette estimation initiale.



(a)



(b)

FIGURE 4.7 – Représentation de la fonction d'état-limite g en fonction du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = \{R_1, R_2\}$ dans l'espace physique (a) et dans l'espace gaussien (b) obtenue à partir de 2000 réalisations par simulation de MC. Les réalisations dans le domaine de sûreté sont en bleu et celles dans le domaine de défaillance sont en magenta. La réalisation en rouge est l'évaluation de g pour les valeurs moyennes des variables et la réalisation en vert est le point de conception ξ^* où l'hyperplan FORM (en noir) est déterminé.

4.3.1.2 Illustration de la méthode FORM sur le cas d'étude initial

Comme montré précédemment, FORM et SORM fournissent une bonne approximation de la probabilité de défaillance P_f lorsque le problème considéré est relativement simple (i.e. avec deux variables aléatoires d'entrée). Nous revenons maintenant à la configuration initiale présentée dans la section 4.3 (avec six variables aléatoires d'entrée). D'abord, il est intéressant d'observer le comportement du courant induit $I_2(Lg)$ en régime de résonance. Ainsi, une représentation du courant induit $I_2(Lg)$ dans la bande de fréquence [5-10 MHz] a été donnée à partir de 10 réalisations par simulation de MC sur la figure 4.8. Nous observons une variabilité importante de $I_2(Lg)$ et surtout de $\max_{\Delta f} I_2(Lg)$ en raison des phénomènes de résonance qui apparaissent autour des fréquences f_n telles que $f_n = (2n + 1) \cdot c/4 \cdot Lg$, où $n \in \mathbb{N}$, Lg est la longueur de la ligne et c est la vitesse de la lumière. La première fréquence de résonance de la ligne se situe aux alentours de 7,5 MHz. On observe cependant un motif particulier de la courbe lié à la combinaison des couplages inductifs et capacitifs.

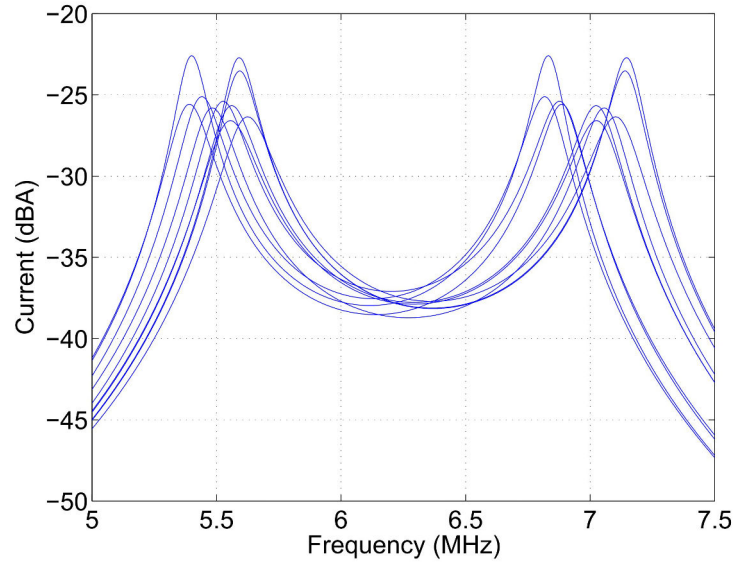


FIGURE 4.8 – Représentation du courant induit $I_2(Lg)$ en fonction de la bande de fréquence [5-10 MHz] obtenue à partir de 10 réalisations par simulation de MC dépendant des variables aléatoires uniformes suivantes : les impédances R_1 , R_2 , R_3 , les hauteurs h_1 , h_2 et la longueur Lg des câbles.

Nous souhaitons maintenant approximer la probabilité de défaillance P_f par l'analyse FORM avec une valeur de seuil $I_t = 70$ mA. La probabilité de défaillance obtenue par FORM est alors $P_{f, \text{FORM}} = 0,139$ avec 142 appels au code de calcul. Dans un second temps, une approximation par la méthode SORM indique $P_{f, \text{SORM}} = 0,082$ avec 27 appels additionnels au code de calcul. Le résultat de référence, obtenu à partir de 10000 réalisations par simulation de MC est $P_{f, \text{MC}} = 0,087 \pm 3 \%$. Dans ce cas, nous notons un écart significatif entre les résultats fournis par FORM et le résultat de référence. Ceci montre les limites de l'analyse FORM lorsque la complexité du problème augmente. Afin de montrer à nouveau l'approximation de la fonction d'état-limite g effectuée par FORM, 2000 évaluations de la fonction d'état-limite g à partir de simulations de MC sont représentées sur l'axe de l'impédance aléatoire R_1 dans l'espace physique (voir Fig. 4.9(a)). Après utilisation de la transformation probabiliste

(de l'espace physique vers l'espace gaussien standard), FORM effectue une approximation de la surface d'état-limite par un hyperplan tangent (en noir) au point de conception ξ^* (en vert) sur la figure 4.9(b). Dans ce cas, nous observons par exemple sur l'axe de la variable aléatoire gaussienne ξ_1 que les réalisations de g dans le domaine de sûreté (en bleu) et celles dans le domaine de défaillance (en magenta) ne sont pas correctement séparées. Ceci permet de mettre en évidence certaines limites de la méthode FORM pour approximer de manière satisfaisante le domaine de défaillance. La raison de ces difficultés, est liée à la fonction d'état-limite g qui présente une forme non-linéaire et trop irrégulière dans le domaine couvert par les différentes variables aléatoires. Par ailleurs, l'approximation de la surface d'état-limite établie par SORM est suffisante dans ce cas. Cependant, si le nombre de variables aléatoires d'entrée augmente, l'approche SORM pourrait également être insuffisante pour approximer la probabilité de défaillance P_f . Afin de contourner ces possibles difficultés de FORM et SORM, les approches par IS et SS introduites dans les sections 4.2.4.2 et 4.2.6, qui sont plus robustes vis-à-vis de la complexité du problème, seront utilisées dans l'analyse suivante.

4.3.2 Susceptibilité d'un équipement électronique connecté à l'extrémité du câble n°2

La première partie de la section 4.3 était dédiée à l'estimation de probabilité de dépassement de valeurs extrêmes du courant induit $I_2(Lg)$. Cependant, un ingénieur CEM peut avoir pour objectif d'estimer la probabilité de ne pas engendrer de dysfonctionnement de l'équipement électronique connecté en bout de ligne, dont l'impédance d'entrée est R_4 . La pdf de défaillance de cet équipement est supposée connue en fonction de la valeur du courant HF qui lui est appliqué en entrée. La partie suivante décrit une procédure permettant de calculer la probabilité d'obtenir une défaillance de l'équipement.

4.3.2.1 Intégration de la défaillance d'un équipement électronique dans le cas d'étude

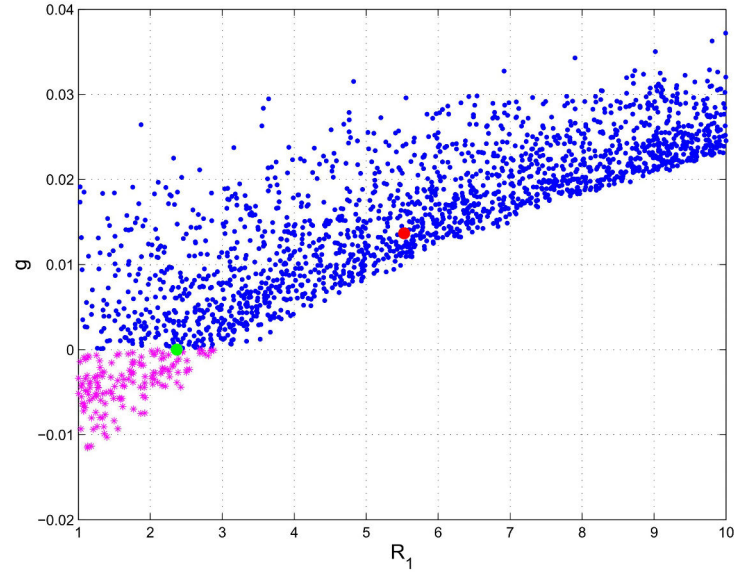
Dans le problème de diaphonie considéré, plutôt que de choisir l'impédance R_4 comme une variable aléatoire, nous l'avons fixée à 10Ω . En effet, R_4 a été choisi de cette façon pour représenter un ensemble d'équipements électroniques (ayant une impédance connue) fabriqués sous les mêmes conditions et connectés à l'extrémité d'un câble. Puisque les appareils diffèrent entre eux en raison des conditions de fabrication, chacun possède son propre seuil de défaut et ainsi l'ensemble des équipements peut être représenté par une pdf de défaillance (fournie à partir d'expériences ou d'analyses théoriques).

A partir de la connaissance de la probabilité de défaillance de l'équipement, l'objectif de l'étude est désormais d'estimer la probabilité de défaillance $P_{f,\text{sys}}$ d'un système définie comme : *la probabilité d'avoir une défaillance de l'équipement D_{f_d} si le maximum de courant induit calculé dans la bande de fréquence $\Delta f = [5-10 \text{ MHz}]$ atteint cette valeur seuil.* En termes de probabilités, cela se traduit par l'estimation de la quantité suivante :

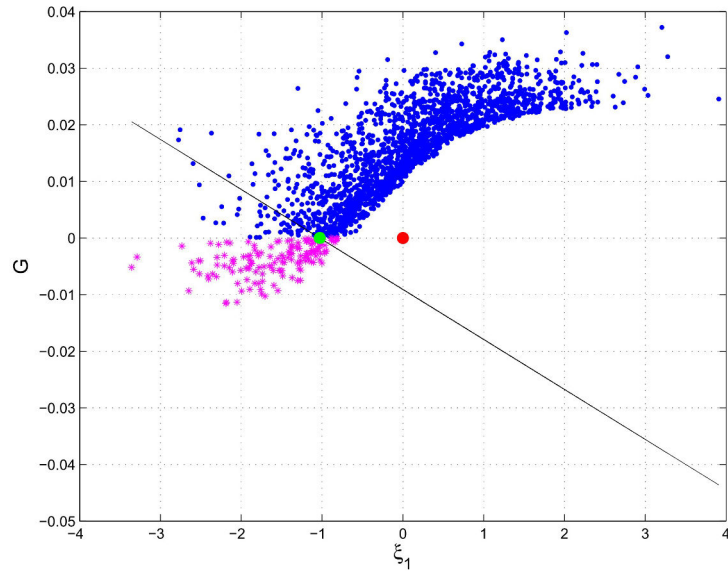
$$P_{f,\text{sys}} = \mathbb{P} \left(D_{f_d} \mid \max_{\Delta f} I_2(Lg) \right) \cdot \mathbb{P} \left(\max_{\Delta f} I_2(Lg) \right), \quad (4.26)$$

où $\mathbb{P} \left(D_{f_d} \mid \max_{\Delta f} I_2(Lg) \right)$ est la probabilité conditionnelle de D_{f_d} sachant $\max_{\Delta f} I_2(Lg)$.

Dans le seul but de proposer une illustration, un histogramme de $\max_{\Delta f} I_2(Lg)$, représenté en bleu sur la figure 4.10, a été construit à partir de 10000 réalisations par simulation de MC. La



(a)



(b)

FIGURE 4.9 – Évaluation de la fonction d'état-limite g en fonction de la composante de la variable aléatoire R_1 (parmi les six variables aléatoires) dans l'espace physique (a) et dans l'espace de la variable aléatoire gaussienne correspondante (b) obtenue à partir de 2000 réalisations par simulation de MC. Les réalisations dans le domaine de sûreté sont en bleu et celles dans le domaine de défaillance sont en magenta. La réalisation en rouge est l'évaluation de g en la valeur moyenne de R_1 et la réalisation en vert est la composante ξ_1^* du point de conception ξ^* où l'hyperplan FORM (en noir) est effectué.

probabilité de défaut de l'équipement $\mathbb{P}(D_{fd})$ est supposée suivre une distribution gaussienne avec une espérance égale à 80 mA et un écart-type égal à 6 mA. La pdf correspondante apparaît en rouge sur la figure 4.10. Deux situations peuvent alors se présenter. Dans le premier cas, aucune intersection ne se produit entre les valeurs maximales de l'histogramme de $\max_{\Delta_f} I_2(Lg)$ et les valeurs minimales des courants pour lesquelles $\mathbb{P}(D_{fd})$ est significative. Dans cette situation, $P_{f,sys}$ peut être considérée comme nulle et l'équipement est alors fiable avec un niveau de probabilité très élevé. Les courbes de la figure 4.10 présentent la situation opposée. Comme les deux courbes se chevauchent, $P_{f,sys}$ donnée par 4.26, sera significativement non nulle.

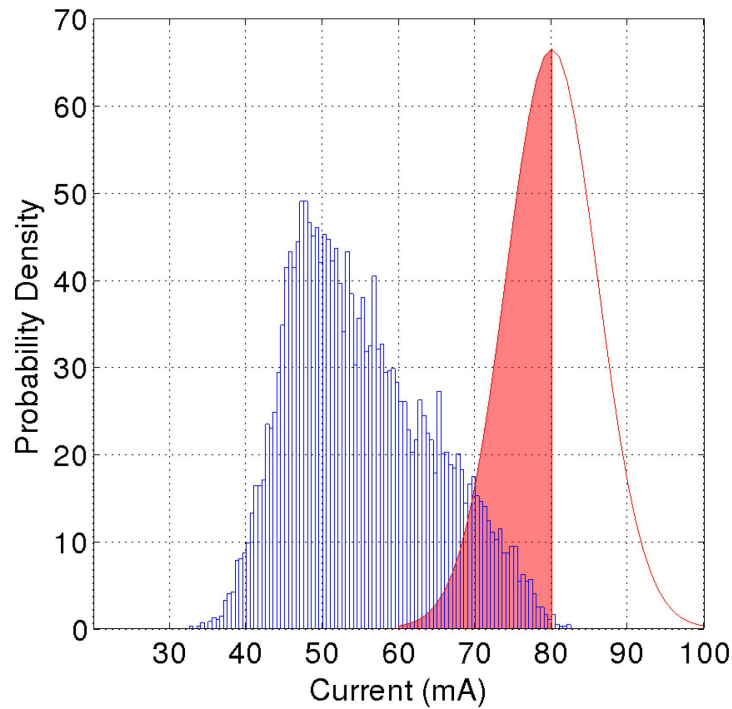


FIGURE 4.10 – Illustration par histogramme des niveaux du maximum de courant induit $I_2(Lg)$ dans la bande de fréquence $[5 - 10 \text{ MHz}]$ (en bleu) et de la pdf gaussienne de défaillance de l'équipement électronique R_4 (en rouge). Le domaine surligné en rouge sous la pdf gaussienne est la probabilité de défaillance $P_{f,sys}$ du système. R_1 est distribué uniformément entre 1Ω et 10Ω .

4.3.2.2 Estimation de la probabilité de défaillance d'un système CEM

La probabilité de défaillance $P_{f,sys}$ du système CEM est estimée en discrétisant le domaine de défaillance (le domaine surligné sous la pdf de défaillance) comme :

$$\begin{aligned}
 P_{f,\text{sys}} \approx \sum_{i=1}^N & \left[\mathbb{P}(D_{fd} | \max_{\Delta_f} I_2(Lg)) \in [I_{2\min} + (i-1) \cdot \Delta_i, \right. \\
 & \left. I_{2\min} + i \cdot \Delta_i] \right] \cdot \left[\mathbb{P}(\max_{\Delta_f} I_2(Lg) \geq I_{2\min} + i \cdot \Delta_i) \right. \\
 & \left. - \mathbb{P}(\max_{\Delta_f} I_2(Lg) \geq I_{2\min} + (i-1) \cdot \Delta_i) \right].
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

$I_{2\min}$ correspond à la valeur limite de courant en dessous de laquelle $\mathbb{P}(D_{fd})$ est négligeable. Nous sélectionnons $I_{2\min}$ comme étant environ trois fois l'écart-type en dessous de la moyenne, i.e. $I_{2\min} = 60$ mA. Le pas Δ_i est choisi pour être légèrement en dessous de l'écart-type, comme un compromis entre temps de calcul et précision de l'estimation de $P_{f,\text{sys}}$. La sommation est arrêtée à N intervalles discrets telle que $\mathbb{P}(\max_{\Delta_f} I_2(Lg) \geq I_{2\min} + N \cdot \Delta_i)$ soit négligeable. Pour N intervalles, cela nécessite $(N+1)$ estimation de $\mathbb{P}(\max_{\Delta_f} I_2(Lg))$ avec les techniques FORM, SORM, IS ou SS. Pour ce qui concerne le cas de la figure 4.10, $N = 4$ intervalles sont sélectionnés avec $I_{2\min} = 60$ mA, $\Delta_i = 5$ mA. Ainsi, l'évaluation maximale est effectuée pour $I_2(Lg) = 80$ mA, pour laquelle la probabilité d'excéder cette valeur a été trouvée comme négligeable, e.g. $7,9 \times 10^{-4} \pm 71$ % par SS.

La probabilité de défaillance $P_{f,\text{sys}}$ calculée par FORM, SORM, IS et SS ainsi que leurs nombres d'évaluations du modèle n_{sys} sont donnés dans la table 4.1. La probabilité de défaillance totale du système CEM calculée par FORM est autour de 3,2 % tandis que celle calculée par SORM, IS et SS sont autour de 2 %. Le nombre d'appels au modèle utilisé par chaque méthode est respectivement 1113, 135, 1100 et 1800. Les résultats obtenus sont comparés au résultat de référence fourni à partir de 10000 réalisations par simulation de MC, $P_{f,\text{sys},\text{MC}} = [2,00 \text{ \%}; 2,19 \text{ \%}]$. Nous remarquons alors que les résultats fournis par SORM, IS et SS sont assez satisfaisants dans la mesure où la différence entre eux et le résultat de référence est très faible. Les nombres entre crochets indiquent les intervalles de confiance déterminés à partir des estimations IS, SS et MC. D'autre part, la réduction du nombre d'appels au modèle est significative.

TABLE 4.1 – Comparaison des méthodes de fiabilité dans la bande de fréquence [5-10 MHz] lorsque R_1 est distribué uniformément entre 1 Ω et 10 Ω .

	FORM	SORM	IS	SS	MC
$P_{f,\text{sys}}$ (%)	3,26	1,97	[1,67; 2,11]	[1,66; 2,36]	[2,00; 2,19]
n_{sys}	1113	135 ^a	1100	1800	10000

^aadditionnel à FORM

4.3.2.3 Sensibilité de la probabilité de défaillance $P_{f,\text{sys}}$ du système CEM

La probabilité de défaillance $P_{f,\text{sys}}$ du système CEM calculée précédemment est de l'ordre de 2 %. Au cours de l'analyse FORM, nous avons obtenu les facteurs d'importance introduits dans la section 4.2.5.1. Ainsi, les facteurs d'importance sur la probabilité de défaillance pour

le dépassement du seuil $I_t = 60$ mA (i.e. la plus faible valeur de courant pour laquelle le système entre en état de défaillance) sont $R_1 = 95$ %, $R_2 = 2$ % et $R_3 = 2$ %. Les autres variables d'entrée sont négligeables. Cela montre que la variable d'entrée que l'ingénieur CEM doit contrôler pour éviter que le système soit défaillant est l'impédance R_1 . Cependant, les facteurs d'importance ne donnent pas d'information sur les mesures qui doivent être prises afin d'éviter une défaillance possible du système. Pour obtenir cette information, nous avons besoin d'exploiter les élasticités des paramètres (c.f. section 4.2.5.2) obtenues par l'analyse FORM pour le seuil $I_t = 60$ mA. Une représentation des élasticités de la borne inférieure (la borne supérieure aurait pu être choisie mais elle était moins influente) de chaque variable d'entrée est donnée sur la figure 4.11. Par exemple, une augmentation des bornes inférieures $R_{1_{\min}} = 1 \Omega$ de l'impédance R_1 et $h_{1_{\min}} = 1,5$ cm de la hauteur h_1 du fil $n^\circ 1$ provoquera une diminution de la probabilité de défaillance $P_{f,\text{sys}}$ du système CEM (ici une augmentation de $R_{1_{\min}} = 1 \Omega$ aura plus d'impact que sur $h_{1_{\min}} = 1,5$ cm car la taille de la barre est plus élevée). Inversement, une augmentation des bornes inférieures $R_{2_{\min}} = 10 \text{ k}\Omega$ et $R_{3_{\min}} = 10 \text{ k}\Omega$ engendrera une augmentation de la probabilité de défaillance $P_{f,\text{sys}}$ alors que les bornes inférieures $h_{2_{\min}} = 1,5$ cm et $Lg_{\min} = 9,5$ m sont négligeables. Notons que ce résultat relatif à la longueur pouvait être anticipé. En effet, la détection du courant maximal sur une plage de fréquence permet de ne pas être sensible à la modification des fréquences de résonance introduites par les variations de longueur.

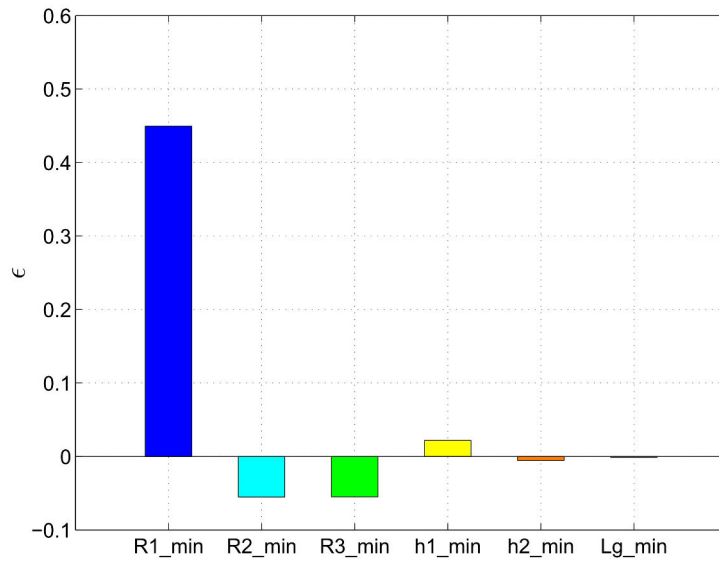


FIGURE 4.11 – Élasticités des bornes inférieures de chaque variable aléatoire d'entrée obtenues par l'analyse FORM pour le seuil de $I_t = 60$ mA.

Nous supposons maintenant que le concepteur CEM soit capable de spécifier une borne inférieure plus restrictive pour R_1 , en l'augmentant de 1Ω à 2Ω . Nous calculons à nouveau, de la même façon, la probabilité de défaillance $P_{f,\text{sys}}$ avec les mêmes variables aléatoires que précédemment mais maintenant l'impédance R_1 est uniformément distribuée entre 2Ω et 10Ω . Une fois encore, 10000 évaluations du maximum de courant induit $I_2(Lg)$ à partir de simulation de MC ont permis de représenter la probabilité de défaillance $P_{f,\text{sys}}$ sur la figure 4.12. Cette probabilité de défaillance $P_{f,\text{sys}}$ est représentée par le domaine surligné en rouge

sous la pdf de défaillance de l'équipement électronique. Nous remarquons que ce domaine a été réduit par rapport à celui représenté sur la figure 4.10 (qui correspond au cas où $R_{1\min} = 1 \Omega$). Dans ce cas, nous avons eu seulement besoin d'utiliser $N=3$ intervalles.

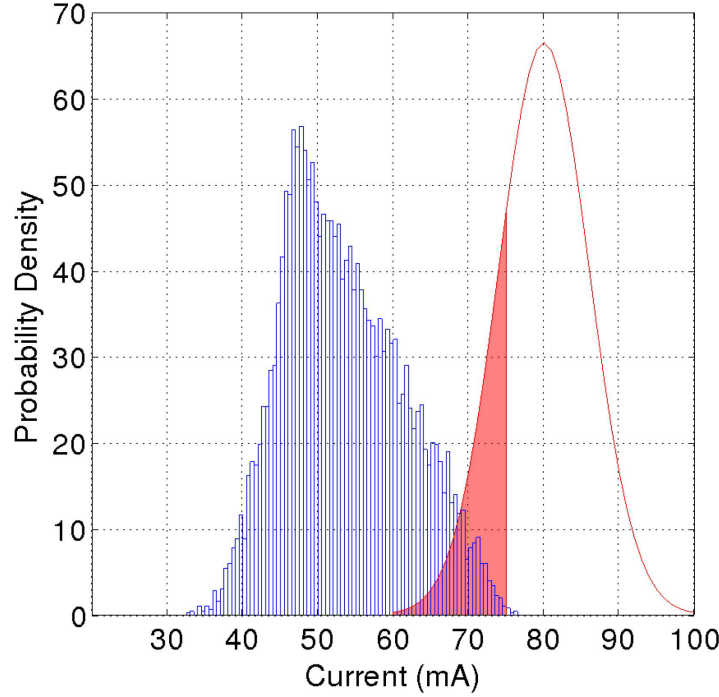


FIGURE 4.12 – Histogramme représentant les niveaux du maximum de courant induit $I_2(Lg)$ dans la bande de fréquence [5–10 MHz] (en bleu) et tracé de la pdf gaussienne de défaillance de l'équipement électronique R_4 (en rouge). Le domaine surligné en rouge sous la pdf gaussienne est la probabilité de défaillance $P_{f,sys}$ du système. R_1 est distribué uniformément entre 2Ω et 10Ω .

Les résultats de $P_{f,sys}$ obtenus par les méthodes de fiabilité et leurs nombres d'appels respectifs au modèle n_{sys} sont donnés à la table 4.2. La probabilité de défaillance est estimée comme étant inférieure à $P_{f,sys} = 1 \%$ par les méthodes fiabilistes. Une nouvelle fois, les estimations fournies par SORM, IS et SS sont proches du résultat de référence obtenu à partir de 10000 réalisations par simulation de MC. Pour indication, la probabilité que le maximum de courant induit $I_2(Lg)$ excède 60 mA passe de 30 % si R_1 est uniformément distribué entre 1Ω et 10Ω , à 22 % lorsque R_1 est une variable aléatoire uniforme entre 2Ω et 10Ω . Cela montre l'impact d'une légère modification sur la charge R_1 .

TABLE 4.2 – Comparaison des méthodes de fiabilité dans la bande de fréquence [5-10 MHz] lorsque R_1 est distribué uniformément entre 2 Ω et 10 Ω .

	FORM	SORM	IS	SS	MC
$P_{f,\text{sys}}$ (%)	1,36	0,74	[0,67; 0,85]	[0,53; 0,94]	[0,73; 0,80]
n_{sys}	984	108 ^a	900	1558	10000

^aadditionnel à FORM

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé différentes méthodes de fiabilité permettant de calculer une probabilité de défaillance dans un contexte de CEM, définie comme la probabilité que le courant induit dépasse une valeur seuil en considérant des incertitudes sur des paramètres d'entrée du modèle.

Ces méthodes à un coût de calcul relativement faible par rapport à la simulation de MC, estiment de manière assez satisfaisante la probabilité de défaillance lorsque l'on s'intéresse à un problème simple (e.g. avec deux variables aléatoires d'entrée). Cependant, lorsque la complexité du problème traité augmente (e.g. avec un nombre de variables aléatoires important), les méthodes classiques telles que FORM et SORM peuvent échouer lors de l'estimation de la probabilité de défaillance (même si dans le cas considéré, SORM fournit d'assez bonnes estimations de cette probabilité). Les limites de ces méthodes mènent alors à l'utilisation de méthodes plus robustes et plus efficaces telles que l'*importance sampling* (IS) et le *subset simulation* (SS).

Ces outils d'analyse de fiabilité pourraient permettre à un concepteur CEM, d'établir un diagnostic des risques de son système à partir d'une information relativement modeste sur les paramètres d'entrée tels que la position des câblages ou les impédances.

A partir de la connaissance de la probabilité de défaillance d'un équipement électronique, nous pouvons fournir une estimation du risque de défaillance d'un équipement électronique, une fois que la probabilité de dépassement des niveaux de courant à son entrée est déterminée via les méthodes fiabilistes. Nous montrons également que l'analyse de sensibilité associée à l'identification du point de conception peut se révéler utile en vue de la reprise de conception du système sous l'angle d'une spécification plus restrictive d'un paramètre. Le choix d'un simple problème de diaphonie a alors permis de mettre en évidence l'avantage de ce type d'approche. Nous évaluerons également leurs contributions sur un problème réaliste de CEM dans la section 6.3 (chapitre 6).

Le chapitre suivant a pour objet de présenter de manière détaillée, la technique de stratification contrôlée (SC), introduite dans la section 3.2.4 (chapitre 3). En effet, cette méthode semble être particulièrement intéressante dans le cadre de l'estimation de valeurs extrêmes d'une réponse d'intérêt obtenue à partir d'un modèle rigoureux.

Références

- [1] O. Sy, J. Vaessen, M. van Beurden, A. Tijhuis, and B. Michielsen, "Probabilistic study of the coupling between deterministic electromagnetic fields and a stochastic thin-wire over a pec plane," in *Electromagnetics in Advanced Applications, 2007. ICEAA 2007. International Conference on*, Torino, Italy, Sept. 2007.
- [2] L. De Menezes, A. Ajayi, C. Christopoulos, P. Sewell, and G. Borges, "Efficient computation of stochastic electromagnetic problems using unscented transforms," *Science, Measurement Technology, IET*, vol. 2, no. 2, pp. 88–95, March 2008.
- [3] M. Magdowski, S. Tkachenko, and R. Vick, "Coupling of stochastic electromagnetic fields to a transmission line in a reverberation chamber," *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, vol. 53, no. 2, pp. 308–317, May 2011.
- [4] P. Bonnet, C. Chauviere, and S. Lalléchère, "Prise en compte de l'incertain pour les couplages électromagnétiques," Tech. Rep. *REI PRINCE* n°07.c0044, DGA, 2009.
- [5] F. Sabath and H. Garbe, "Concept of stochastic modeling for high-power electromagnetics (HPEM) risk analysis at system level," in *Electromagnetic Compatibility (EMC), 2013 IEEE International Symposium on*, Aug 2013, pp. 401–406.
- [6] C. Kasmi, M. Hélier, M. Darces, and E. Prouff, "Generalised pareto distribution for extreme value modelling in electromagnetic compatibility," *Electronics Letters*, vol. 49, no. 5, pp. 334–335, Feb. 2013.
- [7] —, "Modeling extreme values resulting from compromising electromagnetic emanations generated by an information system," *Comptes Rendus Physique*, Apr. 2014.
- [8] T. Bdour and A. Reineix, "Statistical estimation of maximum electric field in electrically large cavity using extreme value theory," in *Electromagnetic Compatibility (EMC), 2015 IEEE International Symposium on*, Aug. 2015, pp. 1426–1429.
- [9] A. Kouassi, J.-M. Bourinet, S. Lalléchère, P. Bonnet, and M. Fogli, "Fiabilité de fonctionnement et sensibilité CEM pour un problème de ligne de transmission," *17ème Colloque International et Exposition sur la Compatibilité Electromagnétique*, 2014.
- [10] E. Genender, A. Kreth, D. Zamow, H. Garbe, and S. Potthast, "Combination of the failure probability with a random angle of incidence of the radiated interference," in *General Assembly and Scientific Symposium, 2011 XXXth URSI*, Aug. 2011, pp. 1–4.
- [11] O. Ditlevsen and H. Madsen, *Structural reliability methods*. J. Wiley and Sons, Chichester, 1996.
- [12] M. Lemaire, A. Chateauneuf, and J.-C. Mitteau, *Fiabilité des structures : Couplage mécano-fiabiliste statique*. Hermès Science Publications, 2005.
- [13] B. Sudret, *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models – Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*, Habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, Oct. 2007.
- [14] R. Rackwitz, *Practical Probabilistic Approach to Design. First order reliability concepts for design codes*. Bulletin d'information du CEB 112, Comité Européen du Béton, 1976.
- [15] R. Rackwitz and B. Flessler, "Structural reliability under combined random load sequences," *Computers & Structures*, vol. 9, no. 5, pp. 489–494, 1978.
- [16] Y. Zhang and A. Der Kiureghian, "Two improved algorithms for reliability analysis," in *Reliability and Optimization of Structural Systems*. Springer, 1995, pp. 297–304.
- [17] K. Breitung, "Asymptotic approximations for multinormal integrals," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 110, no. 3, pp. 357–366, Mar. 1984.
- [18] M. Hohenbichler, S. Gollwitzer, W. Kruse, and R. Rackwitz, "New light on first-and second-order reliability methods," *Structural Safety*, vol. 4, no. 4, pp. 267–284, 1987.
- [19] R. Melchers, "Radial importance sampling for structural reliability," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 116, no. 1, pp. 189–203, Jan. 1990.
- [20] S.-K. Au and J. Beck, "Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation," *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 16, no. 4, pp. 263–277, Oct. 2001.
- [21] J.-M. Bourinet, C. Matrand, and V. Dubourg, "A review of recent features and improvements added to FERUM software," in *Proc. of the 10th International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR'09)*, Osaka, Japan, Sept. 2009. [Online]. Available : <http://www.ifma.fr/FERUM>
- [22] C. E. Baum, T. K. Liu, and F. M. Tesche, "On the analysis of general multiconductor transmission-line networks," *Interaction Note 350*, pp. 467–547, 1978.
- [23] C. E. Baum, "The theory of electromagnetic interference control," *Interaction Note 478*, pp. 87–101, 1989.

La méthode de stratification contrôlée appliquée à la détermination d'interférences électromagnétiques extrêmes avec des variables d'entrée incertaines

5.1 Introduction

Le principal défi posé par la simulation d'un scénario de compatibilité électromagnétique est d'estimer si le risque d'interférence est avéré, compte tenu de la multiplicité et de la variabilité des paramètres décrivant ce scénario. Au delà de cette estimation, l'objectif est alors de fournir les solutions de conception ou éléments de protection promettant de minimiser ou d'écarter ce risque. Nous nous plaçons dans la situation où l'estimation du risque dépend de divers paramètres d'entrée, incluant certains d'entre-eux qui peuvent être considérés comme incertains en premier lieu. Ces évaluations s'appuient très souvent sur des modèles sophistiqués à différentes échelles d'un système (distribution de champ électromagnétique, interaction avec les câbles, circuits électroniques) nécessitant d'importantes ressources en termes de temps et de taille mémoire.

L'obtention avec efficacité des moments de la distribution de la réponse d'un système sollicité par une source d'interférence, a été l'objet d'investigations de plusieurs chercheurs ces dernières années. Divers techniques ont été introduites telles que le *chaos polynomial*, la collocation stochastique, la méthode dite d'*unscented transform* et les plans d'expériences [1–10]. Les techniques par les plans d'expériences visent par exemple, à échantillonner de manière judicieuse l'espace des variables aléatoires d'entrée, pour construire des métamodèles de la réponse d'intérêt. De tels métamodèles ont également été utilisés dans une série de travaux sur une technique de cartographie de l'espace introduite par [11] pour des applications d'antenne. La plupart de ces méthodes ont été développées pour identifier la tendance centrale de la réponse. Elles ne sont donc pas adaptées à l'évaluation de probabilité d'événements extrêmes. Puisque seules quelques techniques s'intéressent à l'estimation de valeurs extrêmes [12–15], nous avons proposé dans le chapitre 4, l'utilisation d'une approche fiabiliste visant à approximer un domaine de défaillance, correspondant à la probabilité de dépassement de gabarit. Ces méthodes permettent également de déterminer la sensibilité de la réponse relative à différentes variables aléatoires d'entrée ou leurs combinaisons.

Ce chapitre est dédié à une approche alternative dite de *stratification contrôlée* (SC), qui a été récemment proposée dans le contexte des statistiques appliquées [17]. Cette approche possède deux caractéristiques d'intérêt pour les applications de CEM. La première, est qu'elle vise spécifiquement à accélérer le processus d'estimation d'un quantile extrême d'une distribution de sortie, qui pourrait représenter des valeurs de risque d'un point de vue CEM. La seconde, est que cette méthode a pour but d'utiliser un modèle rigoureux coûteux en temps de calcul mais d'une manière moins intensive, via le contrôle d'un modèle beaucoup moins sophistiqué et corrélé d'une certaine manière au modèle rigoureux. Lorsqu'un tel modèle existe, il aide à élaborer une stratégie d'échantillonnage des paramètres d'entrée incertains permettant d'accélérer de manière très significative l'estimation de la probabilité d'événements extrêmes avec la même incertitude que ce qu'une approche de type MC avec un nombre important de tirages fournirait.

Ce chapitre est organisé comme suit. Tout d'abord, le principe détaillé de la méthode de SC est présenté dans la section 5.2. Une attention particulière est accordée à la définition d'un coefficient de corrélation entre les modèles de calcul simple et rigoureux. Ce critère de corrélation est en effet déterminant pour cette méthode. De plus, cette section introduit un algorithme affiné appelé la *stratification contrôlée adaptative* (SCA) qui améliore potentiellement les performances de la SC. La section 5.3 présente un cas d'étude simple et les sections 5.4 et 5.5 traitent des applications soulignant les propriétés des techniques SC et SCA. Le scénario considéré est celui d'une propagation d'interférence au sein d'un réseau de fils conducteurs au-dessus d'un plan de masse parfaitement conducteur. Dans les deux sections, le modèle rigoureux est basé sur une résolution numérique des équations de Maxwell par la méthode des moments (MoM). Le modèle simple est basé sur la théorie des lignes de transmission (TLT) dans la section 5.4 ou sur un maillage grossier pour la solution numérique fournie par la résolution de la MoM dans la section 5.5. Enfin, la section 5.5.1.4 permet d'illustrer le fait que l'échantillon de valeurs extrêmes obtenues à partir de la technique de SC, peut servir de test pour l'ajustement d'une distribution de Pareto généralisée.

5.2 Stratification contrôlée (SC)

5.2.1 Présentation de la méthode de SC

Supposons que $Y = f(\mathbf{X})$, où \mathbf{X} est un vecteur aléatoire de taille M décrivant les incertitudes des paramètres d'entrée, et Y est la réponse aléatoire d'un modèle rigoureux f coûteux en temps de calcul. Nous supposons également qu'un modèle simple f_s existe : $Z = f_s(\mathbf{X})$. La réponse Z de ce modèle simple est une approximation grossière de f .

La méthode de SC propose une stratégie permettant d'utiliser le modèle simple f_s , pour estimer des valeurs extrêmes avec un nombre réduit d'appels au modèle coûteux f .

5.2.1.1 Estimation empirique (EE) de quantile

On cherche à estimer le quantile d'ordre α de la sortie Y , notée y_α . Généralement, l'estimation du quantile est effectuée à partir de l'estimation de la cdf, qui mène ensuite à un estimateur du quantile y_α . Supposons que l'on dispose d'un échantillon de taille n (Y_1, \dots, Y_n) représentant un ensemble de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de loi inconnue et dont la pdf est $p(y)$. L'estimateur empirique (EE) de la cdf $F(y)$,

notée $\hat{F}_{EE}(y)$, est obtenu comme :

$$\hat{F}_{EE}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{Y_i \leq y} \quad (5.1)$$

où $\mathbb{1}_{Y_i \leq y}$ est la fonction indicatrice qui vaut 1 lorsque $Y_i \leq y$, et 0 sinon. La cdf $F(y)$ est asymptotiquement gaussienne par :

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{F}_{EE}(y) - F(y)) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma_{EE}^2), \\ \sigma_{EE}^2 &= F(y)(1 - F(y)). \end{aligned} \quad (5.2)$$

L'estimation du quantile d'ordre α est donnée par :

$$\hat{Y}_{EE}(\alpha) = \inf\{y, \hat{F}_{EE}(y) > \alpha\} \quad (5.3)$$

qui est également asymptotiquement normal :

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{Y}_{EE}(\alpha) - y_\alpha) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma_{EE}^2), \\ \sigma_{EE}^2 &= \frac{\alpha(1 - \alpha)}{p^2(y_\alpha)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ce résultat asymptotique met en évidence que la variance est plus élevée lorsqu'un quantile extrême est recherché car $p(y_\alpha)$ est faible.

Afin de réduire la variance du quantile, différentes approches telles que l'estimation de quantile par variable de contrôle et l'estimation de quantile par stratification contrôlée ont été introduites [17]. Ces techniques sont présentées maintenant.

5.2.1.2 Estimation de quantile par variable de contrôle (VC)

Cette section présente une approche de réduction de variance basée sur l'utilisation du modèle simple $Z = f_s(\mathbf{X})$ comme variable de contrôle (VC). En s'appuyant sur le modèle simple Z , il est possible d'évaluer les quantiles z_α ou toute espérance $\mathbb{E}[h(Z)]$ d'une fonction de Z par simulation de MC. Un estimateur de la cdf $F(y)$ donné par une VC Z s'écrit comme :

$$\hat{F}_{VC}(y) = \hat{F}_{EE}(y) - C(\hat{h}_n - \mathbb{E}[h(Z)]), \quad (5.5)$$

où la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par l'utilisateur [18] et $\hat{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n h(Z_j)$. Le paramètre optimal C est le coefficient de corrélation entre $h(Z)$ et $\mathbb{1}_{Y \leq y}$. Cette valeur est inconnue en pratique. Elle est alors estimée par le paramètre \hat{C} , défini comme l'estimateur de la pente obtenue par régression des moindres carrés de $\mathbb{1}_{Y_j \leq y}$ sur $h(Z_j)$:

$$\hat{C} = \frac{\sum_{j=1}^n (\mathbb{1}_{Y_j \leq y} - \hat{F}_{EE}(y))(h(Z_j) - \hat{h}_n)}{\sum_{j=1}^n (h(Z_j) - \hat{h}_n)^2}. \quad (5.6)$$

Il a été montré dans [19] que l'estimateur $\hat{F}_{VC}(y)$ avec le coefficient de corrélation estimé \hat{C} peut être réécrit en introduisant les poids W_j :

$$\hat{F}_{VC}(y) = \sum_{j=1}^n W_j \mathbb{1}_{Y_j \leq y}, \quad (5.7)$$

où $W_j = \frac{1}{n} + \frac{(\hat{h}_n - \mathbb{E}[h(Z)])(\hat{h}_n - h(Z_j))}{\sum_{i=1}^n (h(Z_i) - \hat{h}_n)^2}$ avec $\sum_{j=1}^n W_j = 1$.

Si on choisit $h(Z) = \mathbb{1}_{Z \leq z_\alpha}$, alors $\mathbb{E}[h(Z)] = \alpha$ et $\hat{h}_n = \frac{N_0}{n}$ avec

$$N_0 = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{Z_j \leq z_\alpha} \text{ et } W_j = \frac{\alpha}{N_0} \mathbb{1}_{Z_j \leq z_\alpha} + \frac{1 - \alpha}{n - N_0} \mathbb{1}_{Z_j > z_\alpha}. \quad (5.8)$$

L'estimateur 5.7 a été montré par [20], comme équivalent à l'estimateur de maximum de vraisemblance. Comme les estimateurs de MC convergent [18], nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{F}_{VC}(y) - F(y)) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, \sigma_{VC}^2), \\ \sigma_{VC}^2 &= F(y)(1 - F(y))(1 - \rho_I(\alpha)^2), \end{aligned} \quad (5.9)$$

où $\rho_I(\alpha)$ est le coefficient de corrélation entre $\mathbb{1}_{Y \leq y}$ et $\mathbb{1}_{Z \leq z_\alpha}$ donné par :

$$\rho_I(\alpha) = \frac{\mathbb{P}(Y \leq y, Z \leq z_\alpha) - \alpha F(y)}{\sqrt{F(y)(1 - F(y))} \sqrt{\alpha - \alpha^2}}. \quad (5.10)$$

L'objectif est maintenant d'estimer le α -quantile de Y en utilisant l'estimateur par VC $\hat{F}_{VC}(y)$ de la cdf de Y . On considère les statistiques d'ordre $(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)})$, où l'échantillon est ordonné dans l'ordre croissant avec les poids correspondants $W_{(i)}$ donnés dans l'équation 5.8. En ayant recours à l'estimateur 5.7 de la cdf $F(y)$, l'estimateur par VC du α -quantile est

$$\hat{Y}_{VC}(\alpha) = Y_{(l)}, \quad l = \inf \left\{ k, \sum_{j=1}^k W_{(j)} > \alpha \right\}. \quad (5.11)$$

En utilisant des résultats de réduction de variance pour les techniques de MC [21], cette estimateur $\hat{Y}_{VC}(\alpha)$ est également asymptotiquement normal :

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{Y}_{VC}(\alpha) - y_\alpha) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, \sigma_{VC}^2), \\ \sigma_{VC}^2 &= \frac{\alpha(1 - \alpha)}{p(y_\alpha)^2} (1 - \rho_I^2(\alpha)), \end{aligned} \quad (5.12)$$

où σ_{VC}^2 est la variance réduite et $\rho_I(\alpha)$ est le coefficient de corrélation entre $\mathbb{1}_{Z_i \leq z_\alpha}$ et $\mathbb{1}_{Y_i \leq y_\alpha}$:

$$\rho_I(\alpha) = \frac{\mathbb{P}(Y \leq y_\alpha, Z \leq z_\alpha) - \alpha^2}{\alpha - \alpha^2}. \quad (5.13)$$

Nous pouvons remarquer que la variance de $\hat{Y}_{VC}(\alpha)$ est réduite par un facteur de $(1 - \rho_I^2(\alpha))$ par rapport à la variance de l'estimateur empirique \hat{Y}_{EE} donné dans 5.4. Ceci souligne que, plus le coefficient de corrélation $\rho_I(\alpha)$ est élevé, plus la variance du quantile σ_{VC}^2 est réduite [17].

Enfin, l'estimateur $\hat{\rho}_I(\alpha)$ du coefficient de corrélation est donné par :

$$\hat{\rho}_I(\alpha) = \frac{\sum_{j=1}^n (\mathbb{1}_{Y_j \leq y} - \hat{F}_{EE}(y))(\mathbb{1}_{Z_j \leq z_\alpha} - \hat{h}_n)}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (\mathbb{1}_{Y_j \leq y} - \hat{F}_{EE}(y))^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n (\mathbb{1}_{Z_j \leq z_\alpha} - \hat{h}_n)^2}} \Bigg|_{y=\hat{Y}_{VC}(\alpha)} \quad (5.14)$$

avec $\hat{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{Z_j \leq z_\alpha}$.

5.2.1.3 Estimation de quantile par SC

Les modèles simple $Z = f_s(\mathbf{X})$ et rigoureux $Y = f(\mathbf{X})$ fournissent des réalisations de réponse. Le modèle simple peut mener à des écarts significatifs de la réponse par rapport au modèle rigoureux. Cependant, il est nécessaire que la sensibilité des paramètres d'entrée reste similaire à celle du modèle rigoureux, particulièrement pour les réalisations extrêmes de la réponse Y . Ceci est quantifié, seulement *a posteriori*, avec le critère de corrélation donné par 5.14.

Ainsi, nous introduisons la technique de SC consistant à combiner le modèle simple et le modèle rigoureux pour l'estimation de quantile extrême. Plus précisément, le modèle simple est utilisé pour stratifier l'espace de la sortie $Z = f_s(\mathbf{X})$ en r intervalles particuliers I_1, \dots, I_r appelés strates. Une fois que ces intervalles ont été identifiés, des réalisations de \mathbf{X} sont choisies dans chacun d'entre-eux, et sont exploitées pour évaluer le modèle complexe $Y = f(\mathbf{X})$. Par ce procédé, nous augmentons le nombre de réalisations adéquat pour l'estimation du quantile recherché [17].

Soient $r+1$ quantiles $-\infty = z_{\alpha_0} < z_{\alpha_1} < \dots < z_{\alpha_r} = \infty$ reliés aux probabilités $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_r = 1$. Nous définissons par des strates, les intervalles $]z_{\alpha_{j-1}}, z_{\alpha_j}]$, pour $j = 1, \dots, r$. D'après la formule des probabilités totales, la cdf Y peut être donnée par :

$$F(y) = \sum_{j=1}^r \mathbb{P}(Y \leq y | Z \in]z_{\alpha_{j-1}}, z_{\alpha_j}]) \cdot (\alpha_j - \alpha_{j-1}). \quad (5.15)$$

Ainsi, l'estimation de $F(y)$ nécessite le calcul des probabilités conditionnelles suivantes :

$$p_j(y) = \mathbb{P}(Y \leq y | Z \in]z_{\alpha_{j-1}}, z_{\alpha_j}]). \quad (5.16)$$

Cela mène à l'introduction d'une suite d'entiers N_1, \dots, N_r tels que $\sum_{j=1}^r N_j = n$. En premier lieu, nous tirons N_j réalisations des variables aléatoires d'entrée $(X_i^{(j)})_{i=1, \dots, N_j}$ afin d'obtenir N_j réponses $Z_i^{(j)}$ dans la strate $]z_{\alpha_{j-1}}, z_{\alpha_j}]$. Ensuite, nous calculons pour ces réalisations d'entrée, les réponses du modèle rigoureux $Y_i^{(j)}$. Lorsque ces réponses sont obtenues, les quantités $p_j(y)$ sont estimées par :

$$\hat{p}_j(y) = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} \mathbb{1}_{Y_i^{(j)} \leq y}. \quad (5.17)$$

Enfin, l'estimateur $\hat{F}_{SC}(y)$ de la cdf $F(y)$ est obtenu à partir de :

$$\hat{F}_{SC}(y) = \sum_{j=1}^r \hat{p}_j(y) (\alpha_j - \alpha_{j-1}). \quad (5.18)$$

Cet estimateur est non-biaisé, i.e. $\mathbb{E}[\hat{F}_{SC}(y)] = F(y)$ et sa variance est :

$$\text{Var}[\hat{F}_{SC}(y)] = \sum_{j=1}^r \frac{(\alpha_j - \alpha_{j-1})^2}{N_j} (p_j(y) - p_j(y)^2). \quad (5.19)$$

Lorsque le nombre de strates r est défini, nous introduisons les nombres réels positifs β_j tels que $\sum_{j=1}^r \beta_j = 1$ et $N_j = [n\beta_j]$, où $[x]$ est la partie entière de x . L'estimateur $\hat{F}_{SC}(y)$ est alors asymptotiquement normal par :

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{F}_{SC}(y) - F(y)) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, \sigma_{SC}^2), \\ \sigma_{SC}^2 &= \sum_{j=1}^r \frac{(\alpha_j - \alpha_{j-1})^2}{N_j} (p_j(y) - p_j(y)^2). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Si Z et Y sont indépendantes, alors $p_j(y) = F(y)$ et la variance de $\hat{F}_{SC}(y)$ devient :

$$\text{Var}[\hat{F}_{SC}(y)] = \sum_{j=1}^r \frac{(\alpha_j - \alpha_{j-1})^2}{N_j} (F(y) - F(y)^2). \quad (5.21)$$

En posant $N_j = (\alpha_j - \alpha_{j-1}) \cdot n$, on peut remarquer que la variance de l'estimateur 5.21 est alors identique à celle de l'estimateur empirique : $\text{Var}[\hat{F}_{SC}(y)] = \frac{1}{n} [F(y) - F(y)^2] = \text{Var}[\hat{F}_{EE}(y)]$. Dans ce cas, la technique de SC est donc inutile.

Au contraire, si Z et Y sont positivement corrélées, cela mène à $\forall y \in]y_{\alpha_{j-1}}, y_{\alpha_j}]$:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{F}_{SC}(y)] &= \frac{(\alpha_j - \alpha_{j-1})^2}{N_j} (p_j(y) - p_j(y)^2) \\ &\leq \frac{(\alpha_j - \alpha_{j-1})^2}{4N_j}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

En posant $\alpha_j = \frac{j}{r}$ et $N_j = \frac{n}{r}$, et si de plus, les sorties Z et Y sont fortement corrélées, la variance de l'estimateur $\hat{F}_{SC}(y)$ devient $\text{Var}[\hat{F}_{SC}(y)] = \frac{1}{4rn}$. Nous remarquons que la variance est réduite d'un facteur r par rapport à l'estimateur empirique 5.2. Ceci souligne que la réduction de la variance peut être assez importante lorsque les variables Z et Y sont bien corrélées.

De plus, nous montrons maintenant qu'il est pertinent d'augmenter le nombre de réalisations dans la queue de distribution de la sortie Z afin d'avoir une meilleure estimation d'un quantile extrême y_α de la sortie Y . Supposons que nous soyons intéressés par une estimation dans la queue de distribution de la cdf $F(y)$, dans la zone où $F(y) \approx 1 - \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon \ll 1$. Pour présenter l'intérêt de la technique, nous définissons $r = 4$ strates avec $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 1 - 2\varepsilon$, $\alpha_3 = 1 - \varepsilon$, et nous prenons $N_j = n/4$ (pour $j = 1, \dots, 4$) réalisations dans chaque strate. Cette stratégie répartie $\frac{n}{2}$ réalisations dans la queue de distribution, où $Z > z_{1-2\varepsilon}$. Deux situations peuvent être envisagées :

1. Si Z et Y sont indépendantes, cette stratégie signifie que la variance donnée par 5.21 est $\text{Var}[\hat{F}_{SC}(y)] \approx 2\varepsilon/n$. Ceci mène à une augmentation de la variance par rapport celle de l'estimation empirique : $\text{Var}[\hat{F}_{EE}(y)] = \varepsilon/n$.
2. Si Z et Y sont fortement corrélées, la variance donnée dans 5.22 est alors réduite par rapport à celle de l'estimation empirique car $\text{Var}[\hat{F}_{SC}(y)] = \varepsilon^2/n$. Cette situation montre que la réduction de la variance peut être très significative.

A partir de l'estimateur $\hat{F}_{SC}(y)$ de la cdf $F(y)$, l'estimateur du quantile d'ordre α donné par SC, noté $\hat{Y}_{SC}(\alpha)$ s'écrit comme :

$$\hat{Y}_{SC}(\alpha) = \inf\{y, \hat{F}_{SC}(y) > \alpha\}. \quad (5.23)$$

Ce quantile $\hat{Y}_{SC}(\alpha)$ est asymptotiquement normal :

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{Y}_{SC}(y) - y_\alpha) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma_{SC}^2), \\ \sigma_{SC}^2 &= \frac{\sum_{j=1}^r \frac{(\alpha_j - \alpha_{j-1})^2}{\beta_j} (p_j(y_\alpha) - p_j(y_\alpha)^2)}{p(y_\alpha)^2}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

En résumé, l'intérêt de la méthode de SC repose sur la corrélation entre les modèles simples et rigoureux, et la stratégie de répartition choisie dans les strates.

5.2.1.4 Estimation de quantile par stratification contrôlée adaptative (SCA)

Comme mentionné précédemment, la stratégie de répartition dans les r strates a un impact direct sur l'efficacité de l'estimation du quantile y_α de Y . Ainsi, nous présentons dans cette section une stratégie *adaptative* permettant d'identifier une meilleure technique, quant à la répartition des réalisations des variables d'entrée pour l'estimation du quantile y_α . Le choix de cette répartition dépend des probabilités $p_j(y)$ que nous devons estimer. Cette technique adaptative est décrite comme suit :

1. Appliquer la technique de SC avec un choix a priori de $\tilde{n} = n^\mu$, $\mu \in]0,1[$ et un nombre de répartition β_j dans les strates ; ensuite, nous estimons les probabilités conditionnelles $p_j(y)$ par

$$\tilde{p}_j(y) = \frac{1}{[\beta_j \tilde{n}]} \sum_{i=1}^{[\beta_j \tilde{n}]} \mathbb{1}_{Y_i^{(j)} \leq y}.$$

2. L'estimation de la répartition optimale notée $\tilde{\beta}_j$ est alors donnée par

$$\tilde{\beta}_j = \frac{(\alpha_j - \alpha_{j-1}) [\tilde{p}_j(y) - \tilde{p}_j(y)^2]^{1/2}}{\sum_{k=1}^r (\alpha_j - \alpha_{j-1}) [\tilde{p}_k(y) - \tilde{p}_k(y)^2]^{1/2}}$$

3. Utiliser les $n - \tilde{n}$ dernières simulations en les répartissant dans chaque strate de manière à ce que nous obtenions l'estimation du nombre optimal $[n\tilde{\beta}_j]$ pour tout j .
4. L'estimation de $p_j(y)$ et $F(y)$ est alors donnée par

$$\hat{p}_j(y) = \frac{1}{[\tilde{\beta}_j n]} \sum_{i=1}^{[\tilde{\beta}_j n]} \mathbb{1}_{Y_i^{(j)} \leq y},$$

$$\hat{F}_{SCA}(y) = \sum_{j=1}^r \hat{p}_j(y) (\alpha_j - \alpha_{j-1}).$$

L'estimateur $\hat{F}_{SCA}(y)$ est asymptotiquement normal :

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{F}_{SCA}(y) - F(y)) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma_{SCA}^2), \\ \sigma_{SCA}^2 &= \left(\sum_{j=1}^r (\alpha_j - \alpha_{j-1}) [p_j(y) - p_j(y)^2]^{1/2} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Le choix a priori des nombres positifs β_j n'affecte pas la convergence de la méthode de SCA mais un bon choix de ces derniers l'accélère.

5.2.2 Discussion autour du choix d'un bon modèle simple

La corrélation entre les modèles simples et rigoureux est un point clé de l'efficacité de la méthode de SC. Comme mentionné au préalable, le modèle simple doit reproduire la même sensibilité relative aux réalisations d'entrée fournissant des valeurs extrêmes. Plus précisément, un ensemble de réalisations d'entrée ayant des quantités de réponse plus élevées que le quantile z_α du modèle simple, doit fournir (i.e. avec une forte probabilité d'occurrence) une proportion importante de réponses plus élevées que le quantile y_α du modèle complexe. Pour

cette raison, un modèle simple est dit bien corrélé au modèle rigoureux, s'il peut reproduire la même tendance relative aux variables d'entrée que le modèle rigoureux, pour l'estimation des événements rares.

En pratique, ce niveau de corrélation est quantifié à travers l'opérateur défini dans 5.14, une fois que les simulations sont effectuées pour le même échantillon, avec les deux modèles. Cette estimation de corrélation est seulement effectuée pour contrôler la qualité du modèle simple, et confirmer qu'il accélérera l'identification des réalisations extrêmes de la réponse. Lorsqu'un bon modèle simple est identifié, cette étape n'a plus besoin d'être effectuée. Dans un cas d'étude réel, seule une estimation grossière de cette corrélation est disponible en raison du temps de calcul coûteux des modèles rigoureux. Cependant, dans les sections 5.4 et 5.5, pour le seul but de validation, nous utiliserons un échantillon de taille importante pour estimer celle-ci.

L'identification des modèles simples pour des problèmes de CEM va bien au-delà de ce manuscrit, cependant quelques pistes peuvent être suivies. Un modèle physique basé sur une approximation 1D ou 2D d'un modèle de calcul 3D est une possibilité. Un modèle d'ingénieur d'une situation complexe est une autre voie de recherche (par exemple un modèle de circuit de propagation d'interférence sur une puce de circuit imprimé). Une approximation basée sur un maillage grossier du modèle initial, est également un autre candidat de modèle simple comme illustré dans la section 5.5.

5.3 Cas d'étude

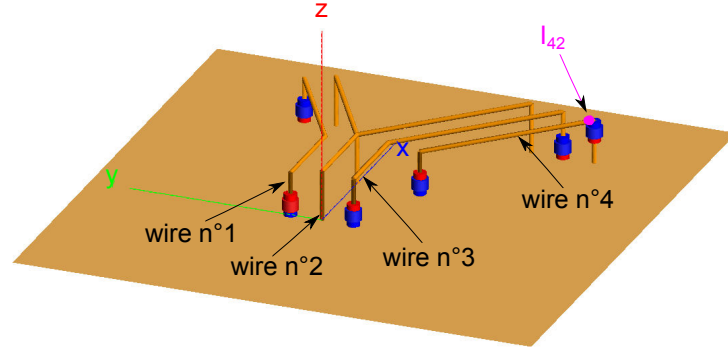
Un cas d'étude est utilisé à travers ce chapitre pour appliquer les techniques de SC et SCA.

La configuration d'interférence électromagnétique choisie traite d'un problème de diaphonie au sein d'un système de fils conducteurs interconnectés au dessus d'un plan de masse de type conducteur électrique parfait (pec) (Fig. 5.1). Le fil $n^{\circ}1$ est composé d'une première section de longueur L_1 parallèle à (Ox) jusqu'à la jonction, et d'une seconde section de longueur L_3 , déviée d'un angle $a_1 = 30^\circ$ par rapport à (Ox). Ce fil est situé à une hauteur h_1 au-dessus du plan de masse. Il est alimenté par une force électromotrice $e = 1$ V. Le fil $n^{\circ}2$ se compose également d'une première section de longueur L_1 parallèle à (Ox) jusqu'à la jonction. Au niveau de la jonction, le fil $n^{\circ}2$ est ensuite divisé en deux branches (avec une connexion parfaitement électrique) : une branche de longueur L_3 s'écarte de $a_1 = 30^\circ$ par rapport à (Ox), et une seconde branche dévie de $a_2 = 45^\circ$ par rapport (Ox) dans la direction opposée. Ce fil est localisé à une hauteur h_2 au-dessus du plan de masse. Le fil $n^{\circ}3$, situé à une hauteur h_3 au-dessus du plan de masse, est également constitué de deux sections : la première, de longueur L_1 , est parallèle à (Ox), la deuxième est de longueur L_2 et fait un angle $a_2 = 45^\circ$ avec (Ox). Le fil $n^{\circ}4$ est à une hauteur h_4 au-dessus du plan de masse. Il est composé d'une seule section de longueur L_2 , et effectue un angle $a_2 = 45^\circ$ avec (Ox).

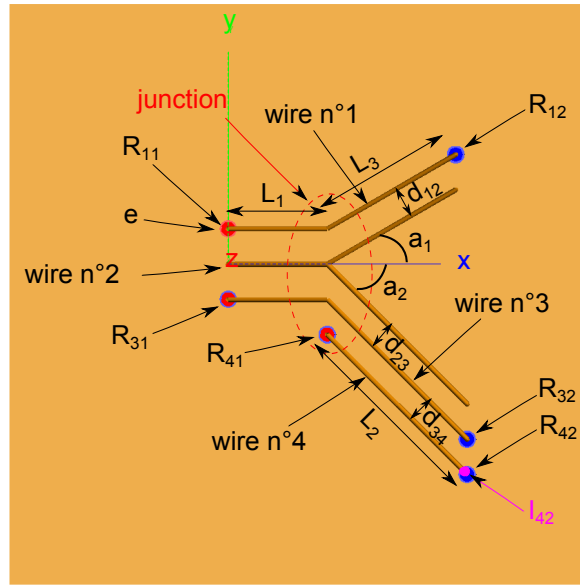
De plus, le fil $n^{\circ}1$ est chargé par deux impédances R_{11} et R_{12} aux extrémités tandis que le fil $n^{\circ}2$ est directement relié au plan de masse à ses extrémités. Le fil $n^{\circ}3$ est chargé par deux impédances R_{31} et R_{32} , et le fil $n^{\circ}4$ est connecté au plan de masse via deux charges R_{41} et R_{42} . Les fils $n^{\circ}1$ et $n^{\circ}2$, $n^{\circ}2$ et $n^{\circ}3$, $n^{\circ}3$ et $n^{\circ}4$ sont respectivement séparés par les distances d_{12} , d_{23} , d_{34} (Fig. 5.1).

Dans ce problème de diaphonie, l'objectif est de calculer des événements d'interférences extrêmes du courant induit I_{42} à l'extrémité opposée du fil $n^{\circ}4$, à l'entrée d'un équipement

électronique ayant pour impédance $R_{42} = 75 \Omega$. Nous visons alors à estimer le quantile d'ordre 95 %, noté $I_{0,95}$, vérifiant $P_f = \mathbb{P}(\max_{\Delta f} I_{42} \geq I_{0,95}) = 0,05$, où $\Delta f = [70-110 \text{ MHz}]$ est la bande de fréquence FM élargie.



(a)



(b)

FIGURE 5.1 – Vue d'ensemble (a) et vue de dessus (b) des 4 fils conducteurs au-dessus d'un plan de masse de type conducteur électrique parfait.

L'impact des paramètres d'entrée incertains sur le courant induit I_{42} est étudié à partir des variables aléatoires suivantes :

- R_{11} et R_{31} sont des variables aléatoires uniformes comprises entre 1Ω et 10Ω ;
- R_{12} et R_{32} sont des variables aléatoires uniformes comprises entre $1 \text{ k}\Omega$ et $10 \text{ k}\Omega$;
- L_1 , L_2 et L_3 sont des variables aléatoires uniformément distribuées entre $0,9 \text{ m}$ et $1,1 \text{ m}$, $1,8 \text{ m}$ et $2,2 \text{ m}$, $1,35 \text{ m}$ et $1,65 \text{ m}$;
- h_1 , h_2 , h_3 , et h_4 sont des variables aléatoires uniformément distribuées entre 12 mm et 18 mm , et variant indépendamment les unes des autres ;

- d_{12} , d_{23} et d_{34} sont des variables aléatoires uniformes comprises entre 4,8 mm et 7,2 mm, et variant également de manière indépendante entre elles.

De plus, le diamètre de chaque fil est fixé à 1 mm et la charge résistive R_{41} a une impédance de 75Ω .

Finalement, ce problème de diaphonie considère 14 variables aléatoires. Dans la suite, les techniques de SC et de SCA seront appliquées afin d'estimer un niveau d'interférence extrême représenté par le quantile $I_{0,95}$ du courant induit I_{42} .

5.4 Application au cas d'une simulation directe des équations de Maxwell avec un modèle de ligne de transmission comme modèle simple pour la méthode de SC

Dans cette section, le modèle simple utilisé est un modèle de calcul appelé PERL, qui est basé sur la théorie des lignes de transmission (TLT) reposant sur le formalisme de l'équation BLT (Baum-Liu-Tesche) [22, 23]. Comme modèle rigoureux, nous avons choisi FEKO® [24], un code de calcul s'appuyant sur une résolution des équations de Maxwell par la méthode des moments (MoM) [25]. Par la suite, les deux modèles de calcul seront notés TLT et MoM.

5.4.1 Estimation de quantile extrême de courant

5.4.1.1 Estimation de la corrélation entre les modèles simple et rigoureux

Dans cette section, le modèle simple utilisé repose sur la théorie des lignes de transmission. Il néglige l'effet des fils verticaux, l'existence des modes différents du mode TEM (absence de re-rayonnement) et considère qu'il n'existe aucun couplage entre les 3 branches du réseau. Quant au modèle rigoureux, il est basé sur une simulation numérique directe des équations de Maxwell sous leur forme intégrale. Le modèle TLT évalue le courant induit en environ 0,4 secondes, tandis que le modèle MoM le calcule en environ 35 secondes (en utilisant un maillage fin des fils à $\frac{\lambda}{27} \approx 10$ cm, où λ est la longueur d'onde).

Pour mettre en évidence la différence entre les niveaux de courant obtenus par TLT et MoM, nous les représentons pour la même réalisation aléatoire des 14 variables aléatoires d'entrée. En sélectionnant une première configuration des paramètres d'entrée incertains, nous traçons les courants induits I_{42} sur la bande de fréquence [70-110 MHz] avec TLT (courbe avec astérisques rouges, voir Fig. 5.2(a)) et avec MoM (courbe avec carrés bleus, voir Fig. 5.2(a)). Le maximum de courant induit est légèrement plus élevé dans MoM que dans TLT avec une résonance apparaissant presque à la même fréquence centrale (≈ 94 MHz). Le niveau de courant induit calculé par TLT est plus faible, et cela s'explique en partie par le rôle des fils verticaux qui ne sont pas considérés dans la simulation TLT.

Nous estimons d'abord des quantiles de référence à partir d'estimations empiriques (cf. relation 5.3) avec un échantillon de grande taille. Les quantiles d'ordre 95 % de TLT ($\hat{Z}_{EE}(0,95) = 0,3560$ mA) et de MoM ($\hat{Y}_{EE}(0,95) = 0,4521$ mA) évalués à partir de 7000 réalisations par simulation de MC sont assez différents. En observant la figure 5.2(a), nous remarquons que les niveaux maximums de courant induit I_{42} calculés par TLT et MoM pour cette combinaison particulière de réalisations de variables aléatoires d'entrée, i.e. $z_{max} = 0,5104$ mA et $y_{max} = 0,5395$ mA, sont plus élevés que leur quantile de niveau 95 %. Ceci met l'accent sur le fait que, le

niveau de corrélation $\hat{\rho}_I(0,95)$ (5.14) entre les deux codes de calcul est probablement significatif.

Si l'on effectue une autre simulation avec TLT et MoM pour une nouvelle réalisation aléatoire des variables d'entrée, nous observons que les courants I_{42} calculés par TLT (courbe avec astérisques rouges, voir Fig. 5.2(b)) et par MoM (courbe avec carrés bleus, voir Fig. 5.2(b)) sont totalement différents par rapport à leur quantile de niveau 95 %. D'un côté, $z_{max} = 0,3099$ mA est plus faible que son quantile d'ordre 95 % correspondant, $\hat{Z}_{EE}(0,95) = 0,3560$ mA. De l'autre, $y_{max} = 0,4678$ mA est plus élevé que son quantile de niveau 95 % associé, $\hat{Y}_{EE}(0,95) = 0,4521$ mA. Cela souligne que les deux modèles ne sont pas parfaitement corrélés au sens de la corrélation $\hat{\rho}_I(0,95)$ (5.14). Pour mesurer la tendance globale entre TLT et MoM autour de leur quantile respectif, nous estimons le coefficient de corrélation $\hat{\rho}_I(0,95) = 0,52$ à partir de 1000 réalisations par simulation de MC. Il convient de souligner que les différences entre les niveaux maximums d'amplitude de courant obtenus à partir des deux modèles peuvent être considérables lorsque des événements d'interférences extrêmes doivent être estimés. Ces différences sont principalement liées aux hypothèses simplificatrices utilisées dans la théorie des lignes de transmission, aux fréquences pour lesquelles les résonances se produisent.

5.4.1.2 Stratégies de répartition des réalisations pour l'estimation de quantile

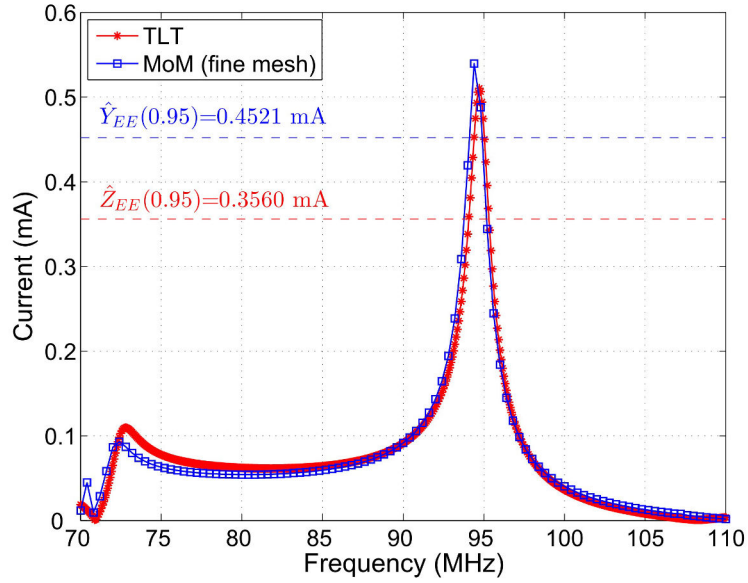
5.4.1.2.a Répartition uniforme

Nous appliquons dans cette section la méthode de SC. Nous proposons de sélectionner 50 réalisations par strates à partir du modèle simple TLT. Pour cela, nous calculons les quantiles de Z à partir d'une simulation de MC avec 7000 réalisations de \mathbf{X} :

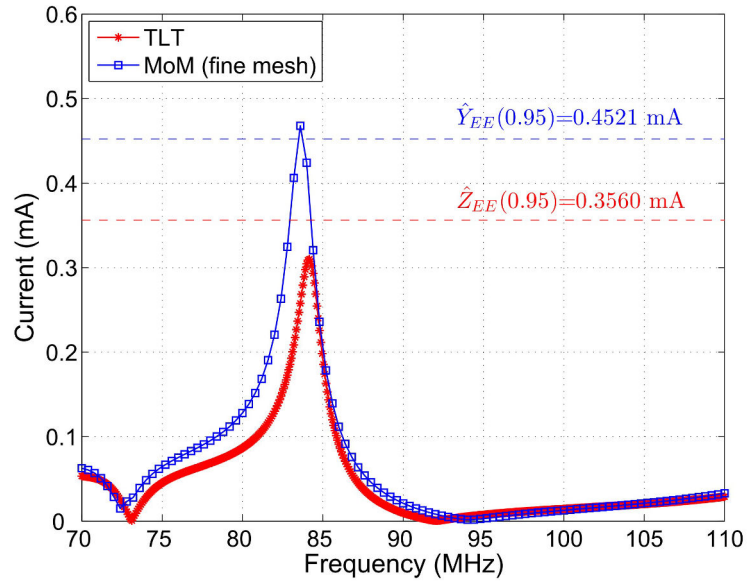
$$\begin{cases} \alpha = 0,5 \longrightarrow z_\alpha = 0,1639 \text{ mA} \\ \alpha = 0,9 \longrightarrow z_\alpha = 0,2981 \text{ mA} \\ \alpha = 0,95 \longrightarrow z_\alpha = 0,3560 \text{ mA.} \end{cases}$$

Nous souhaitons estimer le quantile d'ordre $\alpha = 0,95$ avec au maximum, $n = 200$ évaluations du modèle rigoureux MoM. Ainsi, à partir de $n = 200$ réponses du modèle MoM, une première estimation du quantile d'ordre $\alpha = 0,95$ fournit $\hat{Y}_{SC}(0,95) = 0,4672$ mA. La qualité de cette première estimation est assez bonne car elle est plutôt proche du quantile empirique de référence obtenu à l'aide de 7000 réalisations par simulation de MC : $\hat{Y}_{EE}(0,95) = 0,4521$ mA. Nous examinons au sens des 50 réalisations de la dernière strate, le niveau de corrélation entre les deux modèles TLT et MoM. Ainsi, nous représentons sur la figure 5.3, les niveaux maximums de courant obtenus dans la 4^{ème} strate, où $Z > z_{0,95} = 0,3560$ mA. L'histogramme représente la probabilité d'occurrence des valeurs de courant observées dans la 4^{ème} strate de l'espace de la réponse Y . En observant la figure 5.3, nous vérifions qu'un nombre significatif de valeurs extrêmes de courant est identifié. Parmi les 50 valeurs de courant calculées, 33 d'entre-elles sont supérieures au quantile empirique de référence : $\hat{Y}_{EE}(0,95) = 0,4521$ mA. Nous remarquons ainsi, qu'à partir d'un modèle simple modérément corrélé au modèle complexe, nous sommes capable de déterminer des réalisations d'entrée pertinentes fournissant des valeurs extrêmes de courant. Cet aspect sera exploité dans la section 5.5.1.4 pour ajuster une distribution de valeurs extrêmes.

Puisque $\hat{Y}_{SC}(0,95) = 0,4672$ mA est seulement une estimation, il serait convenable de quantifier sa variance. En principe, cela n'est pas réalisable, mais notre cas d'étude plutôt simple



(a)



(b)

FIGURE 5.2 – Évaluation du courant induit I_{42} au sein de la bande de fréquence [70-110 MHz]. Deux configurations aléatoires de variables d'entrée sont utilisées en (a) et (b) pour le calcul du courant I_{42} avec le modèle simple TLT (courbe avec astérisques rouges) et avec le modèle rigoureux MoM (courbe avec carrés bleus).

permet de renouveler de nombreuses fois, l'estimation du quantile $\hat{Y}_{SC}(0,95)$ afin d'évaluer son écart-type.

En effectuant 10000 estimations du quantile $\hat{Y}_{SC}(0,95)$ (en utilisant $n = 200$ réalisations de MoM pour chaque estimation), nous avons obtenu une espérance de $\hat{\mu}_{Y_{SC}(0,95)} = 0,4532$ mA et

un écart-type de $\hat{\sigma}_{Y_{SC}(0,95)} = 0,0265$ mA. A partir de 10000 estimations empiriques du quantile $\hat{Y}_{EE}(0,95)$ avec $n = 200$ réalisations de MoM pour chaque estimation, nous avons trouvé une espérance de $\hat{\mu}_{Y_{EE}(0,95)} = 0,4550$ mA et un écart-type de $\hat{\sigma}_{Y_{EE}(0,95)} = 0,0305$ mA. Cela valide le fait que l'écart-type de la méthode de SC $\hat{\sigma}_{Y_{SC}(0,95)}$ est inférieur à celui issu d'une estimation empirique. Pour obtenir un écart-type de même ordre (i.e. $\hat{\sigma}_{Y_{SC}(0,95)} = 0,0265$ mA) à partir d'une estimation empirique, nous aurions dû effectuer $n = 260$ réalisations de MoM. Dans le cas présent, la technique de SC apporte un gain d'un peu plus d'un quart des simulations du modèle rigoureux. Cependant, nous devons additionner le temps de calcul requis par le modèle simple. Néanmoins, l'objectif de cette étude n'est pas de réduire le temps de calcul associé à l'estimation du quantile de ce cas test simple. Il s'agit plutôt de mettre en évidence la réduction du nombre d'appels au modèle rigoureux en supposant que nous disposions d'un modèle simple presque « gratuit » en temps de calcul. Le gain en termes de nombre de simulations du modèle rigoureux, obtenu par la technique de SC par rapport à une estimation empirique (EE), est donné par la comparaison de la première et de l'avant-dernière ligne (rouge) de la table 5.1.

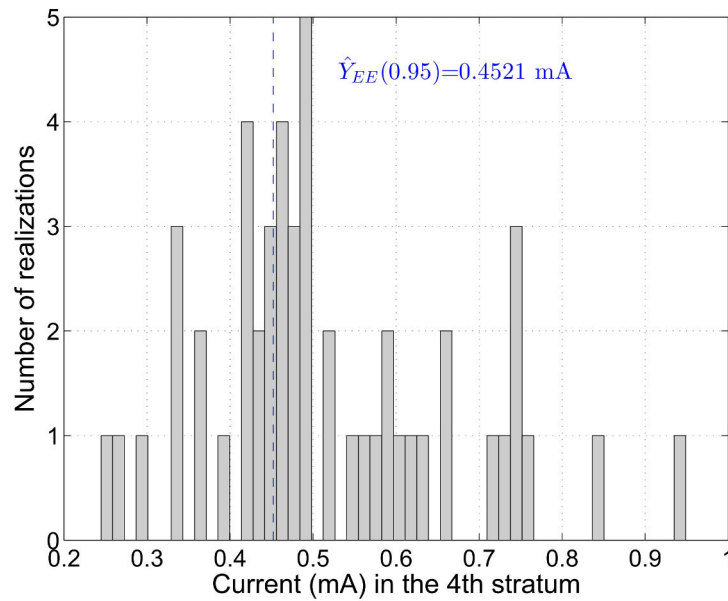


FIGURE 5.3 – Histogramme représentant le nombre de réalisations de courant obtenu dans la 4^{ème} strate. Parmi les 50 valeurs de courant calculées, 33 valeurs sont supérieures au quantile de référence $\hat{Y}_{EE}(0,95) = 0,4521$ mA.

5.4.1.2.b Importance de la répartition

Dans la section précédente, la technique de SC a été appliquée en ayant recours à une stratégie de répartition uniforme avec 50 réalisations dans chacune des 4 strates. Dans cette section, nous appliquons la méthode de SC avec une nouvelle stratégie de répartition afin d'obtenir une meilleure estimation du quantile de niveau 95 %. Ainsi, nous sélectionnons une stratégie de répartition proportionnelle avec $N_j = (\alpha_j - \alpha_{j-1}) \cdot n$, pour $j = 1, \dots, 4$, réalisations dans chaque strate, représentant 100, 80, 10 et 10 réalisations respectivement dans la 1^{ère}, 2^{ème}, 3^{ème} et 4^{ème} strate. En adoptant cette stratégie de répartition, et en effectuant 10000 estima-

tions de quantile par la méthode de SC, nous obtenons une espérance de $\hat{\mu}_{Y_{SC}(0,95)} = 0,4504$ mA et un écart-type de $\hat{\sigma}_{Y_{SC}(0,95)} = 0,0278$ mA. Nous remarquons alors que cette stratégie est moins judicieuse qu'une stratégie uniforme dans la mesure où l'écart-type du quantile est plus élevé.

Nous proposons ensuite une nouvelle stratégie de répartition, avec une répartition plus dense dans la queue de distribution, i.e. 100, 60, 20 et 20 réalisations respectivement dans la 1^{ère}, 2^{ème}, 3^{ème} et 4^{ème} strate. A partir de 10000 estimations de quantile par l'approche de SC, nous obtenons alors une espérance de $\hat{\mu}_{Y_{SC}(0,95)} = 0,4547$ mA et un écart-type de $\hat{\sigma}_{Y_{SC}(0,95)} = 0,0250$ mA. Cette fois, nous observons une meilleure estimation de quantile par rapport à une estimation avec une répartition uniforme puisque l'écart-type du quantile a été réduit. Il aurait été possible d'avoir un écart-type de même ordre en utilisant $n = 280$ réalisations avec une estimation empirique. Le gain de cette stratégie de répartition est autour de 40 % des simulations dans le cas où l'on néglige les temps de calcul utilisé par le modèle simple TLT. Le bénéfice de l'approche de SC avec cette stratégie de répartition par rapport à une estimation empirique (EE) est donné par les lignes bleues de la table 5.1.

Cela souligne le fait que cette stratégie de répartition permet une estimation de quantile plus précise en réduisant son écart-type. Ceci nous mène alors dans la section suivante, à l'application de la technique de SCA, qui permet d'estimer la stratégie de répartition optimale dans chaque strate.

5.4.1.2.c Approche par SCA

L'objet de cette section est d'estimer la meilleure stratégie de répartition dans chaque strate en ayant recours à la technique de SCA présentée dans la section 5.2.1.4.

Nous appliquons d'abord la méthode de SC avec un choix a priori de $\tilde{n} = 100$ simulations avec une répartition de 25 réalisations dans chacune des 4 strates. Ensuite, en estimant la répartition optimale dans chaque strate $\tilde{\beta}_j$, pour $j = 1, \dots, 4$, nous sommes amenés à ajouter 0, 67, 12 et 21 réalisations respectivement dans la 1^{ère}, 2^{ème}, 3^{ème} et 4^{ème} strate. Une fois que ces simulations sont effectuées, nous obtenons une estimation du quantile de $\hat{Y}_{SCA}(0,95) = 0,4272$ mA à partir de $n = 200$ réalisations. Nous quantifions ensuite l'écart-type de la technique de SCA comme nous l'avons effectué pour la méthode de SC. En utilisant 10000 estimations de quantile par approche de SCA avec un choix a priori de 25 réalisations dans chacune des 4 strates, nous avons trouvé une espérance de $\hat{\mu}_{Y_{SCA}(0,95)} = 0,4396$ mA et un écart-type de $\hat{\sigma}_{Y_{SCA}(0,95)} = 0,0267$ mA. Ainsi, nous obtenons une estimation similaire à celle issue de la méthode de SC avec une répartition uniforme de 50 réalisations par strates. La technique de SCA n'apporte aucune contribution significative par rapport à la SC, probablement parce que la qualité du modèle simple est assez faible. Le résultat de l'estimation par SCA est donné sur la table 5.1.

Dans la section suivante, nous utilisons un meilleur modèle simple (i.e. mieux corrélé au modèle rigoureux) afin de vérifier l'apport des techniques de SC et de SCA par rapport à une estimation empirique de quantile.

TABLE 5.1 – Cas d'un modèle simple basé sur la TLT : comparaison des résultats obtenus par SC, SCA et EE pour l'estimation du quantile d'ordre 95 % du courant.

Méthode	Nombre de simulations du modèle rigoureux	Écart-type de l'estimation du quantile d'ordre 95 %
SC avec une répartition uniforme dans les 4 strates : {50; 50; 50; 50}	$n = 200$	$\hat{\sigma}_{Y_{SC}(0,95)} = 0,0265$ mA
SC avec une répartition proportionnelle dans les 4 strates : {100; 80; 10; 10}	$n = 200$	$\hat{\sigma}_{Y_{SC}(0,95)} = 0,0278$ mA
SC avec une répartition arbitraire dans les 4 strates : {100; 60; 20; 20}	$n = 200$	$\hat{\sigma}_{Y_{SC}(0,95)} = 0,0250$ mA
SCA	$n = 200$	$\hat{\sigma}_{Y_{SCA}(0,95)} = 0,0267$ mA
EE	$n = 200$	$\hat{\sigma}_{Y_{EE}(0,95)} = 0,0305$ mA
EE	$n = 260$	$\hat{\sigma}_{Y_{EE}(0,95)} \approx 0,0265$ mA
EE	$n = 280$	$\hat{\sigma}_{Y_{EE}(0,95)} \approx 0,0250$ mA

5.5 Application au cas d'une simulation « full-wave » avec une autre simulation « full-wave » utilisant un maillage grossier comme modèle simple pour la technique de SC

Un maillage grossier est un choix assez intuitif pouvant correspondre à une identification de modèle simple puisque le coût de calcul est plutôt faible. Au delà de l'intuition, la caractéristique importante est le critère de corrélation entre les deux modèles.

Dans cette section, le cas d'étude est toujours celui présenté dans la section 5.3. La seule différence est donc le nouveau modèle simple. En effet, le modèle simple utilisé est le même modèle de calcul FEKO utilisant la MoM avec un maillage grossier des fils, i.e. $\frac{\lambda}{5,5} \approx 50$ cm. Ce modèle simple sera noté MoM_{coa} par la suite.

5.5.1 Estimation de quantile extrême de courant

5.5.1.1 Evaluation de la corrélation entre les modèles simple et rigoureux

Comme dans la section 5.4.1.1, nous voulons à nouveau illustrer les différences entre les modèles simple et rigoureux.

Par conséquent, pour les mêmes réalisations d'entrée, nous représentons les courants induits I_{42} en fonction de la bande de fréquence [70-110 MHz] avec MoM_{coa} (courbe avec cercles roses, voir Fig. 5.4(a)) et avec MoM (courbe avec carrés bleus, voir Fig. 5.4(a)). De nouveau, nous pouvons noter une tendance similaire entre les deux courbes mais nous apercevons des différences entre les niveaux maximums d'amplitude de courant et des fréquences de résonance calculées par MoM_{coa} (i.e. $z_{max} = 0,4359$ mA) et MoM (i.e. $y_{max} = 0,5591$ mA). Notez que pour cette simulation, un maillage grossier avec 49 segments des fils a été utilisé par le modèle simple MoM_{coa}, et un maillage fin avec 150 segments des fils a été requis par le modèle rigoureux MoM.

De plus, nous avons également évalué les quantiles de niveau 95 % de MoM_{coa} ($\hat{Z}_{EE}(0,95) = 0,3897$ mA) et de MoM ($\hat{Z}_{EE}(0,95) = 0,4521$ mA) à partir de 7000 réalisations par simulation de MC. Cette fois encore, les quantiles d'ordre 95 % sont différents. Cependant, nous observons sur la figure 5.4(a) que les niveaux maximums des deux courbes $z_{max} = 0,4359$ mA et $y_{max} = 0,5591$ mA, respectivement calculés par MoM_{coa} et par MoM, sont supérieurs à leur quantile de niveau 95 %. Cette configuration montre une nouvelle fois un certain niveau de corrélation (5.14) entre les deux simulations.

En réalisant des simulations pour une nouvelle configuration aléatoire des variables d'entrée, les courants I_{42} obtenus par MoM_{coa} (courbe avec cercles roses, voir Fig. 5.4(b)) et par MoM (courbe avec carrés bleus, voir Fig. 5.4(b)) sont dans ce cas assez différents vis-à-vis de leur quantile d'ordre 95 %. D'une part, $z_{max} = 0,3599$ mA (les fils sont maillés en 49 segments) est inférieur à son quantile de niveau 95 % correspondant, $\hat{Z}_{EE}(0,95) = 0,3897$ mA. D'autre part, $y_{max} = 0,4598$ mA (les fils sont maillés en 147 segments) est supérieur à son quantile relatif d'ordre 95 %, $\hat{Y}_{EE}(0,95) = 0,4521$ mA. Pour quantifier la similitude entre MoM_{coa} et MoM autour de leur quantile respectif, nous avons estimé le coefficient de corrélation $\hat{\rho}_I(0,95) = 0,76$ à partir de 1000 réalisations par simulation de MC. Dans ce cas, le niveau de corrélation entre les modèles simple et complexe est plutôt élevé. Ceci devrait permettre d'identifier de nombreuses réalisations pertinentes avec le modèle simple. Nous nous attendons donc à une amélioration significative de la qualité de l'estimation du quantile d'ordre 95 % par rapport à celle de la section 5.4.

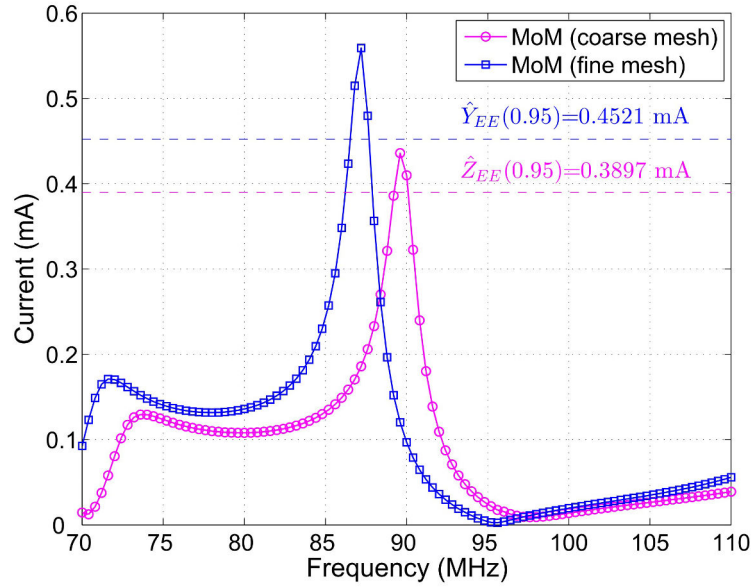
5.5.1.2 Estimation de quantile par SC et SCA

Comme auparavant, nous appliquons la méthode de SC avec une stratégie de répartition uniforme.

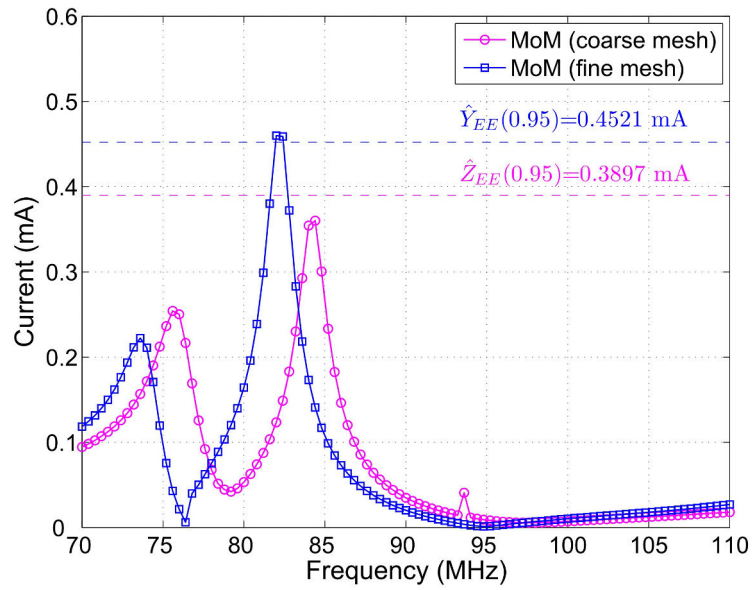
Nous choisissons 50 réalisations par strates à partir du modèle simple MoM_{coa}. En utilisant 7000 réalisations à partir de simulation de MC, nous identifions les quantiles de Z permettant de définir les strates :

$$\begin{cases} \alpha = 0,5 \longrightarrow z_\alpha = 0,1750 \text{ mA} \\ \alpha = 0,9 \longrightarrow z_\alpha = 0,3277 \text{ mA} \\ \alpha = 0,95 \longrightarrow z_\alpha = 0,3897 \text{ mA.} \end{cases}$$

Nous avons effectué 10000 estimations du quantile $\hat{Y}_{SC}(0,95)$ par la méthode de SC (avec $n = 200$ calculs de MoM à chaque estimation), et nous avons obtenu une espérance de



(a)



(b)

FIGURE 5.4 – Le courant induit I_{42} est évalué sur la bande de fréquence [70-110 MHz]. Deux configurations aléatoires des variables d'entrée sont utilisées en (a) et (b) afin de calculer I_{42} avec le modèle simple MoM_{coa} (courbe avec cercles roses) et avec le modèle rigoureux MoM (courbe avec carrés bleus).

$\hat{\mu}_{Y_{SC}(0,95)} = 0,4547$ mA ainsi qu'un écart-type de $\hat{\sigma}_{Y_{SC}(0,95)} = 0,0202$ mA. En utilisant une estimation empirique, il aurait été nécessaire de recourir à $n = 400$ calculs de MoM à chaque estimation pour obtenir un écart-type de même ordre. Ce cas montre que la technique de SC avec une stratégie de répartition uniforme permet de réduire de 50 % le temps de calcul si

l'on néglige le temps de simulation utilisé par MoM_{coa} . Nous remarquons que l'estimation par SC du quantile est meilleure lorsque l'on dispose du modèle simple MoM_{coa} , au lieu du modèle TLT (cf. section 5.4), où l'écart-type de la méthode de SC est supérieur i.e. $\hat{\sigma}_{Y_{SC}(0,95)} = 0,0265$ mA. Cette exemple confirme bien que, lorsque le coefficient de corrélation $\hat{\rho}_I(0,95)$ (5.14) est plus élevé, la technique de SC est plus efficace.

En ayant à notre disposition un bon modèle simple, nous appliquons l'approche par SCA avec $n = 200$ réalisations pour vérifier sa contribution additionnelle à la technique de SC. Notez que dans la section 5.4, la méthode de SCA n'a pas fourni une estimation de meilleure qualité que la SC, vraisemblablement car le modèle simple utilisé était de qualité insuffisante.

Dans un premier temps, nous appliquons la méthode de SC avec un choix a priori de $\tilde{n} = 100$ réalisations et une stratégie de répartition de 25 réalisations dans chacune des 4 strates. Dans un second temps, nous estimons la répartition optimale (parmi les 100 réalisations restantes) dans chaque strate $\tilde{\beta}_j$, pour $j = 1, \dots, 4$. Lorsque cette répartition est identifiée, nous ajoutons les réalisations requises dans chaque strate et nous estimons les quantiles $\hat{Y}_{SCA}(0,95)$. En reproduisant 10000 estimations du quantile par SCA, nous trouvons une espérance de $\hat{\mu}_{Y_{SCA}(0,95)} = 0,4452$ mA et un écart-type de $\hat{\sigma}_{Y_{SCA}(0,95)} = 0,0157$ mA. Pour obtenir un écart-type de même ordre, nous aurions dû utiliser autour de $n = 600$ réalisations. Le bénéfice de la méthode SCA est de 3 fois en termes de temps de calcul (sans considérer le coût de calcul du modèle simple). Cela permet de confirmer le fait que, la technique de SCA peut être très efficace lorsqu'elle s'appuie sur un modèle simple hautement corrélé au modèle rigoureux pour l'estimation des événements extrêmes. Les écarts-types des estimations du quantile d'ordre 95 % et le nombre de simulations requis par le modèle rigoureux, sont donnés pour les méthodes de SC, SCA et EE sur la table 5.2.

TABLE 5.2 – Cas d'un modèle simple basé sur une simulation « full-wave » avec un maillage grossier : comparaison des résultats obtenus par SC, SCA et EE pour l'estimation du quantile d'ordre 95 % du courant.

Méthode	Nombre de simulations du modèle rigoureux	Écart-type de l'estimation du quantile d'ordre 95 %
SC avec une répartition uniforme dans les 4 strates : $\{50; 50; 50; 50\}$	$n = 200$	$\hat{\sigma}_{Y_{SC}(0,95)} = 0,0202$ mA
SCA	$n = 200$	$\hat{\sigma}_{Y_{SCA}(0,95)} = 0,0157$ mA
EE	$n = 200$	$\hat{\sigma}_{Y_{EE}(0,95)} = 0,0305$ mA
EE	$n = 400$	$\hat{\sigma}_{Y_{EE}(0,95)} \approx 0,0202$ mA
EE	$n = 600$	$\hat{\sigma}_{Y_{EE}(0,95)} \approx 0,0157$ mA

5.5.1.3 Discussion autour des performances des deux modèles simples

Dans ce cas d'étude, l'approche par SC a été effectuée avec un modèle simple basé sur la théorie des lignes de transmission (TLT), et un second basé sur résolution par la méthode des moments MoM avec un maillage grossier.

Cependant, même si les estimations des quantiles étaient plutôt d'assez bonne qualité en s'appuyant sur le modèle simple TLT, les résultats ont été améliorés en utilisant le modèle simple MoM_{coa} mieux corrélé au modèle complexe, selon le critère de corrélation donné par 5.14. Le fait que le modèle simple TLT soit moins corrélé au modèle rigoureux pourrait être expliqué par les approximations de la TLT, qui néglige l'effet des fils verticaux, le re-rayonnement des fils et ignore le couplage entre les 3 branches du réseau. En ayant utilisé un maillage grossier i.e. $\frac{\lambda}{5,5} \approx 50$ cm (tandis que le modèle rigoureux est maillé à $\frac{\lambda}{27} \approx 10$ cm), cela a permis d'identifier plus précisément, des réalisations de réponse dans chacune des 4 strates, et ainsi d'estimer plus efficacement la cdf $F(y)$ (et donc le quantile de niveau 95 %).

5.5.1.4 Distribution de valeurs extrêmes

L'échantillon formé par les réponses extrêmes supérieures au quantile $\hat{Y}_{SC}(0,95) = 0,4672$ mA peut être utilisé en vue d'un test d'ajustement d'une distribution de Pareto généralisée afin d'obtenir un meilleur aperçu sur la distribution de probabilité d'événements extrêmes [13]. Nous rappelons d'abord, que si une variable aléatoire continue X suit une distribution de Pareto généralisée, la cdf est alors donnée par [26] :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi(x - \gamma)}{\eta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x - \gamma}{\eta}}, & \xi = 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

où γ , ξ et η sont respectivement les paramètres de *position*, de *forme* et d'*échelle* de la distribution de probabilité.

L'ajustement de la distribution de Pareto généralisée est appliqué ici à titre d'exemple à un ensemble de réalisations particulières de la section 5.4.1.2.a (TLT vs MoM).

En prenant les valeurs de courant supérieures au quantile estimé $\hat{Y}_{SC}(0,95) = 0,4672$ mA (i.e. paramètre de position) obtenues dans la 3^{ème} et 4^{ème} strate lors de l'estimation par SC, nous ajustons une distribution de Pareto généralisée. Parmi les 100 valeurs des deux dernières strates, 35 valeurs sont supérieures à $\hat{Y}_{SC}(0,95) = 0,4672$ mA et sont utilisées pour ajuster une distribution de Pareto généralisée à partir de la technique de maximum de vraisemblance [27]. Les paramètres de forme $\xi = 0,23$ et d'échelle $\eta = 0,12$ mA de la distribution de Pareto généralisée ont été obtenus avec un intervalle de confiance de niveau 95 % : $\xi \in [-0,18; 0,64]$, et $\eta \in [0,06; 0,18$ mA].

La distribution de Pareto généralisée ajuste raisonnablement bien les valeurs extrêmes de courant, voir Fig. 5.5(a). Il faut également noter que la méthode de SC peut faciliter l'identification de très rares événements tels qu'une réponse de courant à presque 1,6 mA. Cependant, nous ne pouvons pas déduire la probabilité d'occurrence associée à un tel événement extrême. Une précaution raisonnable est de restreindre l'analyse de la distribution de Pareto généralisée pour évaluer un quantile de probabilité plus élevée, dans la mesure où l'on dispose d'un nombre raisonnable de réalisations au-dessus du quantile, disons typiquement 10. Puisque 35

réalisations extrêmes de courant sont disponibles, cette limite conduit à $(35-10)/35$, i.e. environ le quantile d'ordre 70 % de ces réalisations extrêmes. Cela correspond au quantile d'ordre 98,5 % de la distribution initiale $F(y)$.

La figure 5.5(b) présente la cdf de la distribution des valeurs extrêmes ainsi que l'ajustement de la distribution de Pareto généralisée. Cette représentation confirme que la distribution de Pareto généralisée suit difficilement la distribution empirique au-delà du quantile de niveau 71 %, i.e. la limite de validité de l'ajustement. Le quantile d'ordre 70 % de ces réalisations extrêmes, estimé à partir de la distribution de Pareto généralisée est de 0,6365 mA. Par comparaison, une estimation empirique directe du quantile d'ordre 98,5 % (obtenues par 7000 réalisations à partir de simulation de MC) donne $\hat{Y}_{EE}(0,985) = 0,5722$ mA. Nous notons que ces valeurs sont assez proches.

5.6 Conclusion

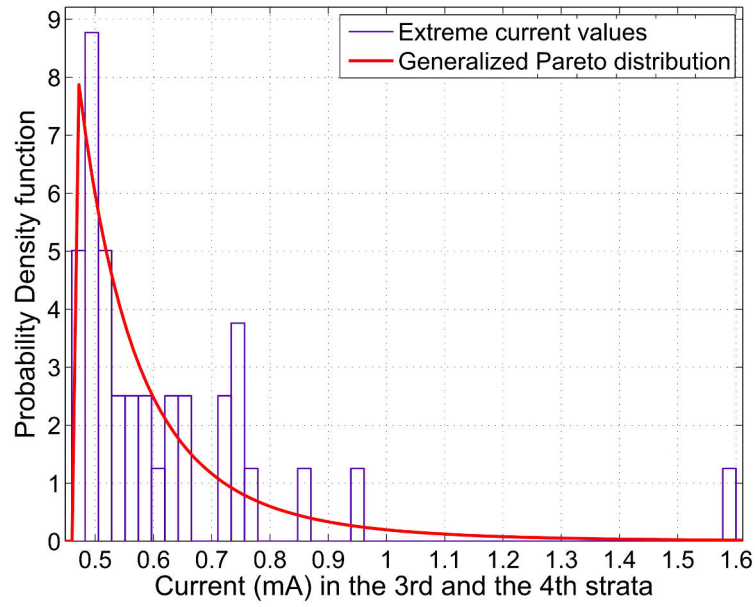
Ce chapitre introduit la méthode de stratification contrôlée (SC) et sa variante la stratification contrôlée adaptative (SCA) appliquées à l'analyse d'un problème de CEM. Cette approche propose une réduction de variance pour l'estimation d'un quantile d'ordre α (α proche de 1), lorsque la réponse du modèle de calcul utilisé est coûteuse en temps de calcul. Cette méthode s'appuie sur un modèle simple, qui est une approximation grossière (supposée à un coût de calcul faible) du modèle de calcul coûteux, pour sélectionner des réalisations d'entrée pertinentes afin d'estimer des événements extrêmes dans le contexte de variables incertaines.

La qualité de cette estimation dépend de la capacité du modèle simple à reproduire la même tendance par rapport aux variables d'entrée que le modèle rigoureux selon une définition spécifique de leur corrélation.

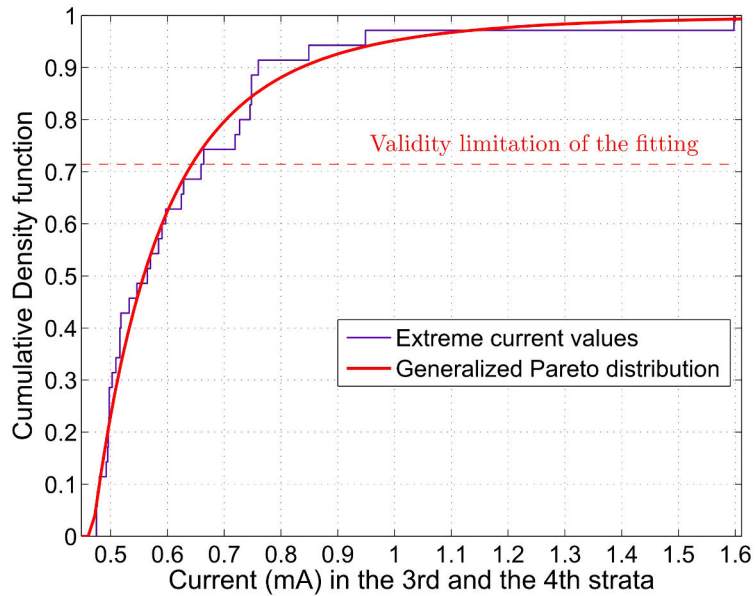
En s'appuyant sur un modèle simple basé sur la théorie des lignes de transmission, et un modèle rigoureux de résolution numérique des équations de Maxwell, nous avons estimé un quantile extrême d'un courant interférent au sein d'un faisceau de câble en réduisant le temps de calcul (relatif à une estimation empirique). De plus, l'utilisation d'un modèle simple a permis d'ajuster une distribution de valeurs extrêmes afin d'estimer un quantile encore plus élevé. La même étude a également été appliquée en ayant recours à un modèle numérique de calcul basé sur un maillage grossier, même si ce dernier était plutôt coûteux. Puisque ce modèle de simulation avec un maillage relâché est plus corrélé au modèle de simulation avec un maillage fin, le bénéfice en termes de réduction du nombre de calcul de ce dernier a augmenté significativement.

L'un des principaux défis à propos de la méthode de SC est de trouver des modèles de substitution simples et adéquats pour différents scénarios de modélisation de CEM. Nous avons pu vérifier qu'un maillage grossier par rapport à un maillage fin de discrétisation spatiale pour la résolution des équations de Maxwell pouvait être un bon candidat. D'autres modèles tels que des modèles de circuit ou des modèles analytiques incluant des approximations pourraient être éligibles autant que des métamodèles construits à partir de différentes techniques statistiques. L'identification de tels modèles est une voie de recherche à explorer.

Le but du chapitre suivant est, d'appliquer les méthodes fiabilistes (cf. chapitre 4) et la technique de SC sur un scénario réaliste de CEM. Cette étude a pour objet de vérifier l'apport d'une analyse par ces techniques sur une configuration complexe de CEM.



(a)



(b)

FIGURE 5.5 – Ajustement de (a) la pdf et (b) de la cdf de la distribution de Pareto généralisée sur des valeurs extrêmes de courant identifiées par le modèle simple TLT dans les 3^{ème} et 4^{ème} strate.

Références

- [1] I. Stievano, P. Manfredi, and F. Canavero, "Stochastic analysis of multiconductor cables and interconnects," *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, vol. 53, no. 2, pp. 501–507, May 2011.
- [2] P. Manfredi and F. Canavero, "Numerical calculation of polynomial chaos coefficients for stochastic per-unit-length parameters of circular conductors," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 50, no. 3, pp. 74–82, Mar. 2014.
- [3] P. Kersaudy, S. Mostarshedi, B. Sudret, O. Picon, and J. Wiart, "Stochastic analysis of scattered field by building facades using polynomial chaos," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 62, no. 12, pp. 6382–6393, Dec. 2014.
- [4] F. Diouf, F. Paladian, M. Fogli, C. Chauvière, and P. Bonnet, "Emission in reverberation chamber : numerical evaluation of the total power radiated by a wire with a stochastic collocation method," in *Electromagnetic Compatibility, 2007. EMC Zurich 2007. 18th International Zurich Symposium on*, Sep. 2007, pp. 99–102.
- [5] H. Bagci, A. Yucel, J. Hesthaven, and E. Michielssen, "A fast stroud-based collocation method for statistically characterizing emi/emc phenomena on complex platforms," *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, vol. 51, no. 2, pp. 301–311, May 2009.
- [6] L. De Menezes, A. Ajayi, C. Christopoulos, P. Sewell, and G. Borges, "Efficient computation of stochastic electromagnetic problems using unscented transforms," *Science, Measurement Technology, IET*, vol. 2, no. 2, pp. 88–95, Mar. 2008.
- [7] M. Magdowski, S. Tkachenko, and R. Vick, "Coupling of stochastic electromagnetic fields to a transmission line in a reverberation chamber," *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, vol. 53, no. 2, pp. 308–317, May 2011.
- [8] S. Lallechère, P. Bonnet, I. El Baba, and F. Paladian, "Unscented transform and stochastic collocation methods for stochastic electromagnetic compatibility," in *Computational Electromagnetics International Workshop (CEM)*, 2011, Aug. 2011, pp. 24–29.
- [9] H. Tarhini, "Etude de la susceptibilité des cartes des circuits imprimés face aux agressions électromagnétiques de fortes puissances," Ph.D. dissertation, Université de Limoges, 2008.
- [10] B. Jannet, "Influence de la non-stationnarité du milieu de propagation sur le processus de Retournement Temporel (RT)," Ph.D. dissertation, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 2014.
- [11] J. Bandler, R. Biernacki, S. H. Chen, P. Grobelny, and R. Hemmers, "Space mapping technique for electromagnetic optimization," *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 42, no. 12, pp. 2536–2544, Dec. 1994.
- [12] E. Genender, A. Kreth, D. Zamow, H. Garbe, and S. Potthast, "Combination of the failure probability with a random angle of incidence of the radiated interference," in *General Assembly and Scientific Symposium, 2011 XXXth URSI*, Aug. 2011, pp. 1–4.
- [13] C. Kasmi, M. Hélier, M. Darces, and E. Prouff, "Generalised pareto distribution for extreme value modelling in electromagnetic compatibility," *Electronics Letters*, vol. 49, no. 5, pp. 334–335, Feb. 2013.
- [14] —, "Modeling extreme values resulting from compromising electromagnetic emanations generated by an information system," *Comptes Rendus Physique*, Apr. 2014.
- [15] T. Bdour and A. Reineix, "Statistical estimation of maximum electric field in electrically large cavity using extreme value theory," in *Electromagnetic Compatibility (EMC), 2015 IEEE International Symposium on*, Aug. 2015, pp. 1426–1429.
- [16] A. Kouassi, J.-M. Bourinet, S. Lalléchère, P. Bonnet, and M. Fogli, "Fiabilité de fonctionnement et sensibilité CEM pour un problème de ligne de transmission," *17ème Colloque International et Exposition sur la Compatibilité Electromagnétique*, 2014.
- [17] C. Cannamela, J. Garnier, and B. Iooss, "Controlled stratification for quantile estimation," *The Annals of Applied Statistics*, vol. 2, no. 4, pp. 1554–1580, June 2008.
- [18] B. L. Nelson, "Control variate remedies," *Operations Research*, vol. 38, no. 6, pp. 974–992, 1990.
- [19] T. Hesterberg, "Control variates and importance sampling for the bootstrap," in *Proceedings of the Statistical Computing Section of the American Statistical Association*, vol. 40, 1993, p. 48.
- [20] R. Davidson and J. G. MacKinnon, "Regression-based methods for using control variates in Monte Carlo experiments," *Journal of Econometrics*, vol. 54, no. 1, pp. 203–222, 1992.
- [21] H. A. David, *Order statistics*. Wiley & Sons, New York, 1981.
- [22] C. E. Baum, T. K. Liu, and F. M. Tesche, "On the analysis of general multiconductor transmission-line networks," *Interaction Note 350*, pp. 467–547, 1978.
- [23] C. E. Baum, "The theory of electromagnetic interference control," *Interaction Note 478*, pp. 87–101, 1989.

- [24] <https://www.feko.info>.
- [25] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. Wiley-IEEE Press, 1993.
- [26] J. Pickands, “Statistical inference using extreme order statistics,” *the Annals of Statistics*, vol. 3, no. 1, pp. 119–131, 1975.
- [27] S. Coles, *An introduction to statistical modeling of extreme values*. Springer, 2001.

Troisième partie

Cas d'application

Traitement d'incertitudes sur un problème de couplage onde EM-câble de transport d'électricité aérien

6.1 Introduction

L'évaluation de la sécurité de systèmes complexes est un problème majeur dans un contexte IEMI. La protection des systèmes électriques contre les ondes EM est l'une des activités majeures menées au sein du CEA de Gramat. Ce dernier doit s'assurer que le couplage entre les ondes EM et les câbles de distribution d'électricité ne risque pas d'engendrer un défaut à l'entrée des systèmes électroniques connectés en bout de câbles. Dans ce type de problème, la prise en compte des incertitudes est un enjeu majeur car les systèmes étudiés recouvrent des configurations très variées, dans la mesure où de nombreux paramètres d'entrée peuvent être incertains sur d'importants domaines de variation.

Ainsi, ce chapitre vise à traiter des incertitudes sur un problème de couplage entre une onde EM et un câble de transport d'électricité aérien, via les méthodes de fiabilité (cf. chapitre 4) et la technique de stratification contrôlée (cf. chapitre 5). Le but est d'évaluer l'apport et les limites de ces méthodes sur un problème réellement soulevé.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons à l'évaluation d'un risque d'interférence du système étudié, représenté par le dépassement d'un seuil prescrit. Afin de quantifier ce risque, nous nous appuierons sur les méthodes fiabilistes. Au delà de la quantification de ce risque, l'étude vise à identifier, à partir d'analyses de sensibilité, les paramètres d'entrée incertains (relatifs à l'onde EM et/ou au câble) qui entraînent le système dans sa zone de défaillance.

Dans un deuxième temps, nous appliquerons la méthode de SC pour estimer un quantile extrême de courant (i.e. de niveau 99 %) en ayant recours à un modèle rigoureux. L'objectif de cette seconde étude, consiste à estimer le quantile de niveau 99 % d'un niveau d'interférence en réduisant le coût du modèle rigoureux, à partir de l'utilisation d'un modèle simple (moins coûteux).

6.2 Présentation du problème

Cette section a pour objet de présenter le cas test traité dans ce chapitre.

Celui-ci se présente sous la forme d'un câble conducteur d'électricité cylindrique de longueur L , de diamètre d , et situé à une hauteur h au dessus d'un sol de conductivité σ et de permittivité relative ϵ_r . Il est illuminé par une onde EM considérée comme plane (voir Fig. 6.1). Le champ électrique \vec{E} est défini par sa polarisation θ_p . L'angle d'incidence de l'onde suit la direction de propagation \vec{k} avec un angle d'élévation θ_e , et un angle d'azimut ϕ . L'onde EM incidente est un signal transitoire de temps de montée t_m et de temps de largeur t_l (voir Fig. 6.2(a)). Sa représentation dans le domaine fréquentiel est également donnée sur la figure 6.2(b).

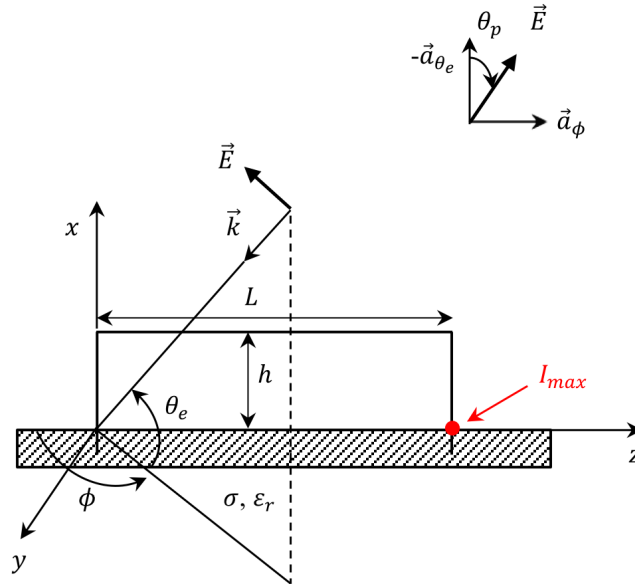
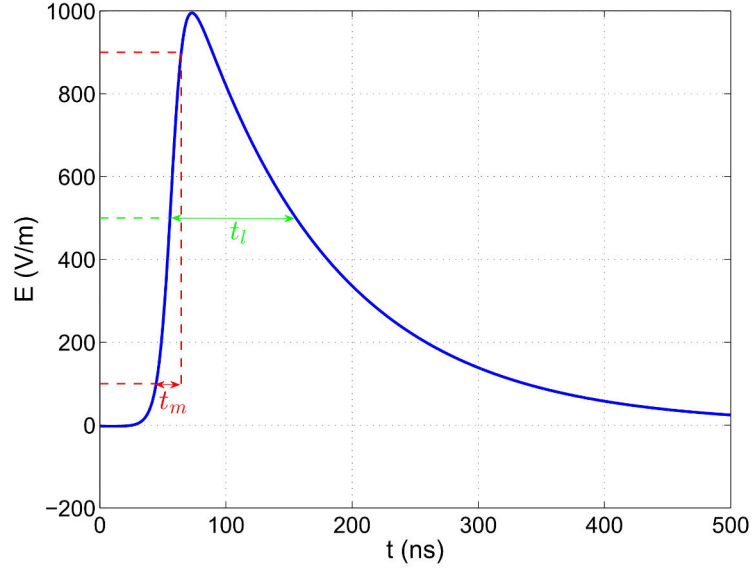


FIGURE 6.1 – Câble enterré dans un sol réel illuminé par une onde EM.

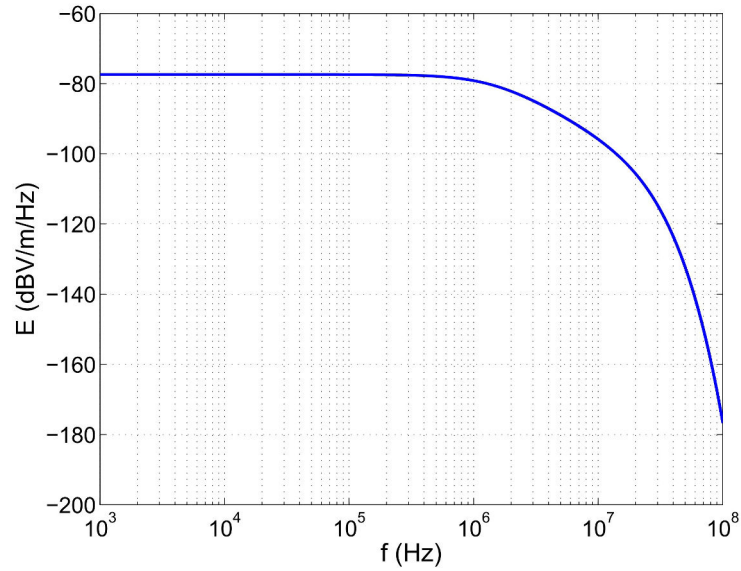
Dans ce problème de couplage, nous sommes intéressés par le niveau maximum de courant I_{\max} ($I_{\max} = \max |I|$, où $|\cdot|$ est la valeur absolue) à l'extrémité du câble en $z = L$. Afin d'étudier l'impact de paramètres d'entrée incertains sur le courant I_{\max} , nous considérons les variables aléatoires suivantes :

- t_m est une variable aléatoire uniforme entre 1 ns et 20 ns ;
- t_l est une variable aléatoire uniforme entre 50 ns et 500 ns ;
- θ_p est une variable aléatoire uniforme entre 0° et 90° ;
- θ_e est une variable aléatoire uniforme entre 0° et 90° ;
- ϕ varie uniformément entre 0° et 359° ($[0^\circ ; 360^\circ[$) ;
- L varie uniformément entre 100 m et 500 m ;
- h varie uniformément entre 6 m et 12 m ;
- d est une variable aléatoire uniforme entre 1 cm et 20 cm ;
- ϵ_r est une variable aléatoire uniforme entre 1 et 10.

De plus, l'amplitude maximale du champ électrique \vec{E} est fixée à 1 kV/m (voir Fig. 6.2(a)), et la conductivité du sol est un paramètre σ . Au total, ce problème considère un vecteur aléatoire d'entrée $\mathbf{X} = \{t_m, t_l, \theta_p, \theta_e, \phi, L, h, d, \epsilon_r\}$ contenant les variables aléatoires $\{X_i, i = 1, \dots, 9\}$.



(a)



(b)

FIGURE 6.2 – (a) Onde EM de forme bi-exponentielle dans le domaine temporel avec un temps de montée t_m et un temps de largeur t_l . (b) Représentation de l'onde EM dans le domaine fréquentiel.

La suite du chapitre est consacrée à l'utilisation de l'analyse de sensibilité globale, des méthodes fiabilistes, et de la méthode de SC sur ce problème de couplage. Chaque technique

est employée afin d'analyser le câble au dessus d'un sol rocailleux ($\sigma = 10^{-3}$ S/m), et d'un sol en terre ($\sigma = 5 \times 10^{-2}$ S/m).

6.3 Analyse de sensibilité globale et application des méthodes fiabilistes sur le problème de couplage onde EM-câble

Cette section a pour but d'effectuer une analyse de sensibilité (AS) globale, et d'estimer la probabilité de dépassement d'un seuil prescrit par les méthodes de fiabilité sur le problème de couplage onde EM-câble. L'étude est d'abord effectuée pour un câble au dessus d'un sol rocailleux, puis d'un sol en terre. Une conclusion est ensuite donnée sur l'ensemble des résultats obtenus en fonction de la nature du sol.

Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus à l'aide de la toolbox open-source FERUM4.1 [1] couplée avec un code de calcul interne du CEA/Gramat, basé sur la théorie des lignes de transmission (TLT) [2].

6.3.1 Sol rocailleux

Dans cette section, nous choisissons de considérer le câble au dessus d'un sol rocailleux, en fixant la conductivité du sol à $\sigma = 10^{-3}$ S/m.

6.3.1.1 Analyse de sensibilité globale

Tout d'abord, il est intéressant d'observer les variations du courant I_{\max} en fonction des variables aléatoires d'entrée du problème défini dans la section 6.2. Une représentation par histogramme du courant I_{\max} en fonction des aléas d'entrée est alors donnée à partir de 1000 réalisations par simulation de MC sur la figure 6.3. Sur l'ensemble des 1000 réponses de courant, I_{\max} varie entre 0 et 163 A. On constate que les valeurs de courant sont majoritairement comprises entre 0 A et 90 A, puis au delà, apparaissent des valeurs extrêmes de I_{\max} .

Nous sommes maintenant intéressés par l'identification des variables aléatoires d'entrée entraînant d'importantes variations du courant I_{\max} . Nous effectuons alors une AS globale, en estimant les indices de Sobol (cf. section 3.2.1). Un histogramme représentant les indices de Sobol du 1^{er} ordre et les indices totaux, est alors donnée sur la figure 6.4. Les indices du 1^{er} ordre montrent l'effet des variables d'entrée en négligeant leurs interactions, tandis que les indices totaux représentent leurs effets globaux sur les variations du courant I_{\max} . Ces derniers montrent alors que les variations du courant I_{\max} sont essentiellement liées aux angles (ϕ , θ_p , θ_e), et au temps de largeur (t_l) de l'onde EM. Les paramètres géométriques (L , h et d) du câble ont très peu d'impact sur les fluctuations du courant tandis que l'effet des autres variables (t_m et ϵ_r) est négligeable.

D'un point de vue physique, cette AS semble cohérente dans la mesure où le niveau de couplage est par nature très sensible à la polarisation et à l'ongle d'incidence de l'onde source.

Après l'AS globale, nous souhaitons estimer la probabilité de dépassement d'un seuil fixé par les méthodes fiabilistes. Ceci est l'objet de la section suivante.

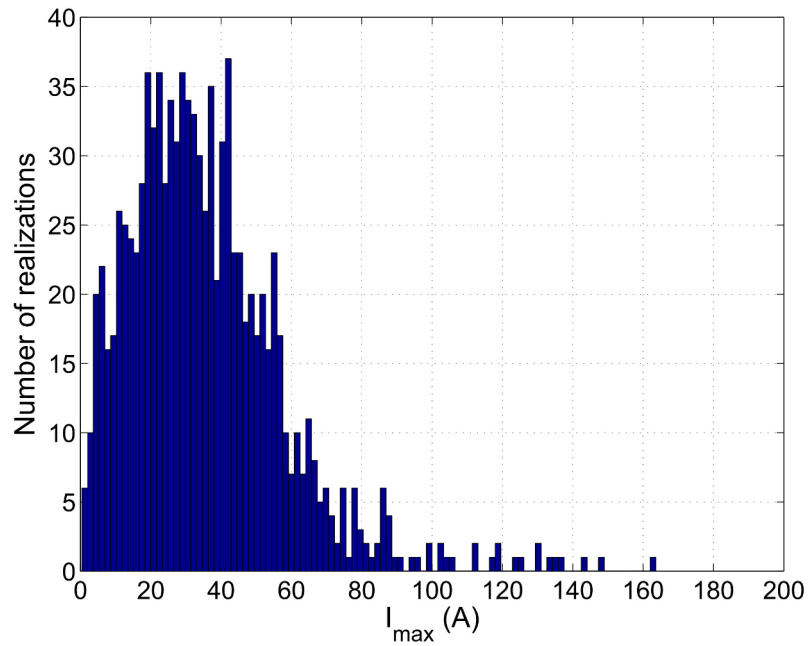


FIGURE 6.3 – Cas d'un sol rocailleux : représentation du courant I_{\max} à partir de 1000 réalisations par simulation de MC.

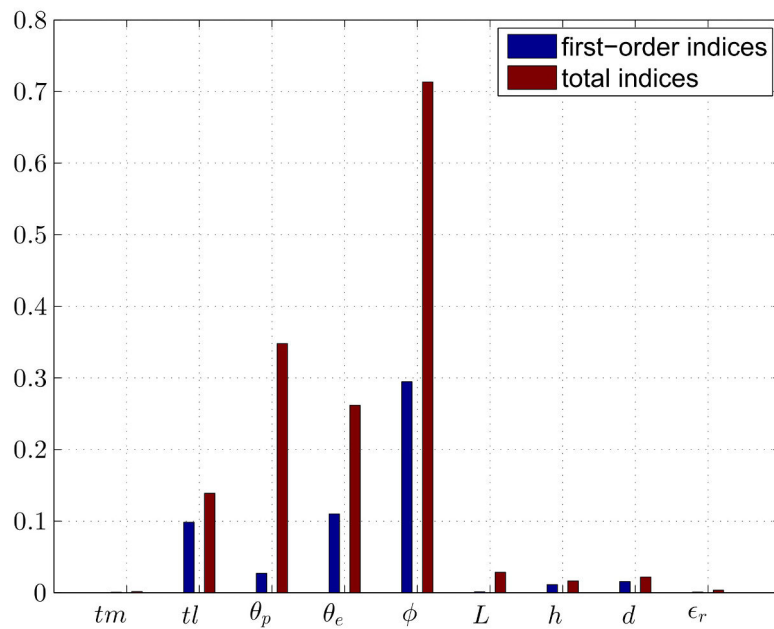


FIGURE 6.4 – Cas d'un sol rocailleux : analyse de sensibilité globale du courant I_{\max} par indices de Sobol (indices du 1^{er} ordre et indices totaux).

6.3.1.2 Estimation d'une probabilité de défaillance P_f

Cette section a pour but d'estimer une probabilité de défaillance, définie comme la probabilité de dépassement d'un seuil prescrit en prenant en compte les aléas d'entrée mentionnés dans la section 6.2.

6.3.1.2.a Estimation de P_f sur le domaine total de variation de l'angle d'azimut de l'onde EM

Après avoir observé les variations du courant I_{\max} sur la figure 6.3, nous proposons d'estimer par les méthodes fiabilistes, la probabilité de dépassement d'un seuil de 80 A (seuil fixé arbitrairement, voir Fig. 6.3). Cette probabilité de défaillance, notée $P_f = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A})$ est estimée par les méthodes fiabilistes (FORM, SORM, IS et SS). Les résultats des estimations de P_f , ainsi que les nombres d'appels n au code de calcul associés sont donnés dans la table 6.1. Nous remarquons un écart significatif entre les résultats fournis par FORM ($P_{f,\text{FORM}} = 1,8 \times 10^{-3}$), SORM ($P_{f,\text{SORM}} = 5,4 \times 10^{-4}$) et le résultat de référence obtenu à partir de 10000 réalisations par simulation de MC ($P_{f,\text{MC}} = [3,4 \times 10^{-2} ; 3,8 \times 10^{-2}]$). Nous constatons alors que les méthodes FORM et SORM présentent des limites concernant l'approximation du domaine de défaillance. De plus, le nombre d'appels au code de calcul effectué par FORM est très élevé (i.e. 1724), alors que cet algorithme n'a généralement besoin que de quelques centaines d'évaluations du modèle pour converger vers le point de conception. Cela est probablement dû à la surface d'état-limite qui possède une forme non-linéaire et trop irrégulière au voisinage du point de conception. Afin de contourner cette difficulté, les approches par IS et SS sont utilisées. Les estimations de P_f données par IS et SS sont respectivement $P_{f,\text{IS}} = [1,3 \times 10^{-2} ; 2,8 \times 10^{-2}]$ et $P_{f,\text{SS}} = [3,2 \times 10^{-2} ; 4,1 \times 10^{-2}]$. Ces résultats ont été obtenus en ayant recours à 2000 appels au modèle. Il est à souligner que ces 2000 évaluations au code de calcul ont été choisies pour satisfaire un compromis entre précision et réduction du temps de calcul par rapport à une méthode de type MC. L'approximation de P_f est cette fois plus proche du résultat de référence, même si la méthode IS semble éprouver quelques difficultés à estimer correctement P_f .

TABLE 6.1 – Cas d'un sol rocailleux : estimation de $P_f = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A})$.

	FORM	SORM	IS	SS	MC
P_f	$1,8 \times 10^{-3}$	$5,4 \times 10^{-4}$	$[1,3 \times 10^{-2} ; 2,8 \times 10^{-2}]$	$[3,2 \times 10^{-2} ; 4,1 \times 10^{-2}]$	$[3,4 \times 10^{-2} ; 3,8 \times 10^{-2}]$
n	1724	54	2000	2000	10000

Comme évoqué précédemment, les méthodes FORM et SORM présentent des limites à prendre en compte la complexité du problème, en raison des irrégularités trop fortes autour du point de conception. Nous proposons alors d'effectuer une étude de la géométrie de la surface d'état-limite autour du point de conception [3]. Le but est de représenter la géométrie de la surface d'état-limite ∂D dans tous les plans de coupe (ξ_k, ξ_l) (où $k, l \in \{1, \dots, 9\}$ avec $k < l$) contenant le point de conception ξ^* identifié par la méthode FORM. Certains de ces plans de coupe sont représentés sur la figure 6.5. Cette étude montre que la surface d'état-limite est assez régulière pour toutes les paires de variables aléatoires, à l'exception de celles faisant intervenir la variable aléatoire ξ_5 , représentant l'angle d'azimut ϕ dans l'espace gaussien centré

réduit. On peut ainsi observer que la surface d'état-limite (i.e. frontière entre les domaines rouge et bleu) est assez pointue dans les 3 plans de coupe du bas de la figure 6.5.

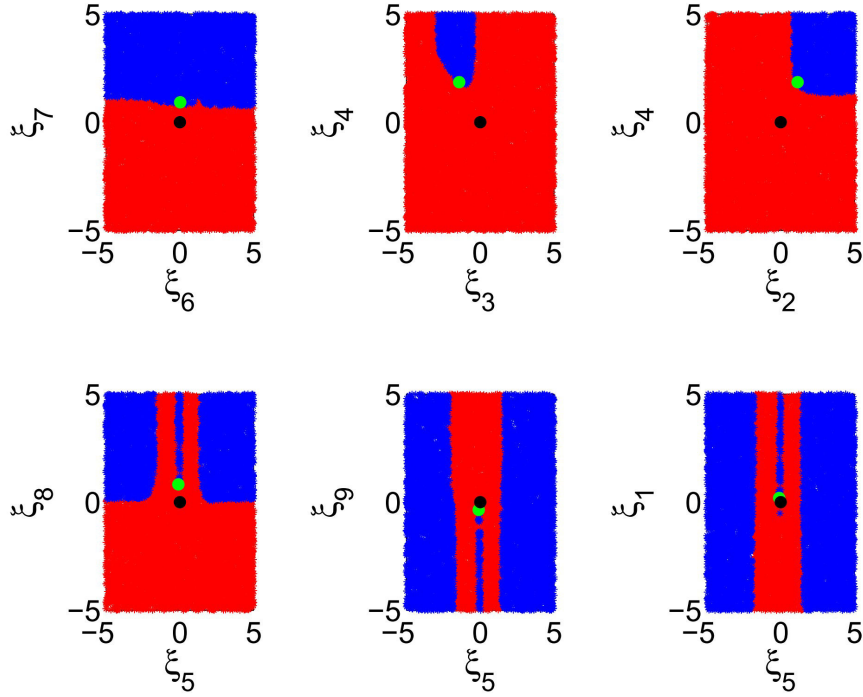


FIGURE 6.5 – Plans de coupe autour du point de conception ξ^* (en vert) identifié par FORM.

Pour réduire l'irrégularité de la surface d'état-limite provoquée par l'angle d'azimut ϕ , nous proposons de partitionner le domaine initial de variation de ϕ en 4 quadrants : $\phi \in [0^\circ; 90^\circ]$, $\phi \in [90^\circ; 180^\circ]$, $\phi \in [180^\circ; 270^\circ]$ et $\phi \in [270^\circ; 359^\circ]$.

L'analyse fiabiliste sera alors effectuée séparément sur chaque quadrant d'angle d'azimut ϕ , et P_f sera estimée en moyennant les résultats obtenus par quadrant.

6.3.1.2.b Estimation de P_f par quadrant d'angle d'azimut de l'onde EM

Dans un premier temps, il est intéressant d'illustrer le comportement du courant I_{\max} en fonction de chaque quadrant d'angle d'azimut. Pour cela, une représentation par histogramme sur chaque quadrant est donnée à partir de 1000 réalisations par simulation de MC sur la figure 6.6. Nous observons que lorsque $\phi \in [0^\circ; 90^\circ]$ et $\phi \in [270^\circ; 359^\circ]$, I_{\max} varie respectivement entre 0 A et 134 A, et entre 0 A et 165 A. Sur les quadrants $\phi \in [90^\circ; 180^\circ]$ et $\phi \in [180^\circ; 270^\circ]$, le courant I_{\max} est compris entre 0 A et environ 75 A. On remarque ainsi que les niveaux de courant sont plus élevés sur le premier et le dernier quadrant d'angle d'azimut ϕ . Cette observation semble cohérente d'un point de vue physique, car le courant est généralement plus important lorsque l'angle d'incidence selon l'azimut se situe au voisinage de l'axe du câble ($\phi = 0^\circ$ ou $\phi = 359^\circ$), à l'extrémité opposée du courant I_{\max} .

L'analyse de fiabilité est maintenant effectuée pour estimer les probabilités de défaillance sur chaque quadrant d'angle d'azimut, définies par $P_{f_1} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A} \mid \phi \in [0^\circ; 90^\circ])$, $P_{f_2} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A} \mid \phi \in [90^\circ; 180^\circ])$, $P_{f_3} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A} \mid \phi \in [180^\circ; 270^\circ])$ et $P_{f_4} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A} \mid \phi \in [270^\circ; 359^\circ])$. La probabilité de défaillance recherchée $P_f = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A})$ est

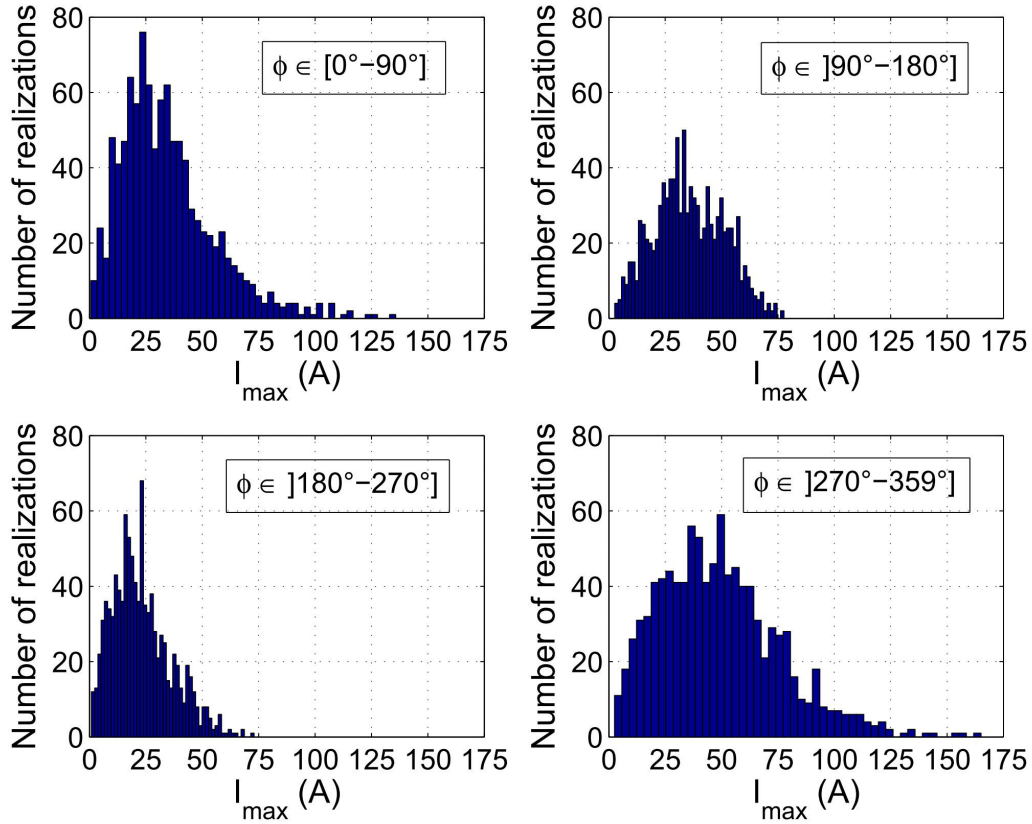


FIGURE 6.6 – Cas d'un sol rocailleux : histogramme du courant I_{\max} obtenu à partir de 1000 réalisations par simulation de MC sur chaque quadrant d'angle d'azimut ϕ .

ensuite calculée en moyennant les estimations obtenues sur chaque quadrant d'angle d'azimut. Les résultats des estimations de P_{f_1} , P_{f_2} , P_{f_3} , P_{f_4} et les nombres d'appels au modèle associés n_1 , n_2 , n_3 et n_4 sont respectivement donnés par les tables 6.2, 6.3, 6.4, 6.5. La probabilité de défaillance P_f est donnée sur la table 6.6. En comparant la table 6.1 et la table 6.6, on peut ainsi remarquer que l'erreur commise par FORM et surtout SORM a été réduite par rapport au résultat de référence donné par simulation de MC. Les méthodes IS et SS semblent également fournir de meilleures estimations de P_f . Cette stratégie qui consiste à partitionner l'angle ϕ en 4 quadrants, a alors permis de réduire les non-linéarités et irrégularités de la surface d'état-limite au voisinage du point de conception. Toutefois, le nombre d'appels au modèle utilisé par la méthode FORM sur chaque quadrant reste assez important en raison de la complexité du problème traité. Un nombre de 2000 évaluations du modèle a été choisi pour les méthodes IS et SS afin d'allier précision de l'estimation de P_f , et réduction en temps de calcul par rapport à une approche classique de MC. Il est à noter qu'une analyse fiabiliste en considérant des valeurs déterministes d'angle ϕ régulièrement réparties sur $[0^\circ ; 359^\circ]$ comme dans [3], aurait permis d'améliorer la qualité des approximations FORM et SORM mais aurait augmenté les temps de calcul.

TABLE 6.2 – Cas d'un sol rocailleux : estimation de $P_{f_1} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A} \mid \phi \in [0^\circ; 90^\circ])$ par les méthodes de fiabilité.

	FORM	SORM	IS	SS	MC
P_{f_1}	$1,6 \times 10^{-1}$	$5,6 \times 10^{-2}$	$[4,2 \times 10^{-2}$; $4,7 \times 10^{-2}]$	$[3,4 \times 10^{-2}$; $4,3 \times 10^{-2}]$	$[4,5 \times 10^{-2}$; $4,9 \times 10^{-2}]$
n_1	1676	54	2000	2000	10000

TABLE 6.3 – Cas d'un sol rocailleux : estimation de $P_{f_2} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A} \mid \phi \in]90^\circ; 180^\circ])$ par les méthodes de fiabilité.

	FORM	SORM	IS	SS	MC
P_{f_2}	$1,0 \times 10^{-2}$	$2,5 \times 10^{-4}$	$[5,5 \times 10^{-4}$; $6,8 \times 10^{-4}]$	$[3,4 \times 10^{-4}$; $7,0 \times 10^{-4}]$	$[3,6 \times 10^{-4}$; $8,4 \times 10^{-4}]$
n_2	3180	54	2000	2028	10000

TABLE 6.4 – Cas d'un sol rocailleux : estimation de $P_{f_3} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A} \mid \phi \in]180^\circ; 270^\circ])$ par les méthodes de fiabilité.

	FORM	SORM	IS	SS	MC
P_{f_3}	$8,0 \times 10^{-4}$	$2,0 \times 10^{-5}$	$[4,1 \times 10^{-5}$; $5,2 \times 10^{-5}]$	$[3,4 \times 10^{-5}$; $8,4 \times 10^{-5}]$	$[6,0 \times 10^{-5}$; $3,4 \times 10^{-4}]$
n_3	1004	54	2000	2528	10000

TABLE 6.5 – Cas d'un sol rocailleux : estimation de $P_{f_4} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A} \mid \phi \in]270^\circ; 359^\circ])$ par les méthodes de fiabilité.

	FORM	SORM	IS	SS	MC
P_{f_4}	$4,3 \times 10^{-1}$	$1,9 \times 10^{-1}$	$[1,0 \times 10^{-1}$; $1,2 \times 10^{-1}]$	$[1,2 \times 10^{-1}$; $1,4 \times 10^{-1}]$	$[1,1 \times 10^{-1}$; $1,2 \times 10^{-1}]$
n_4	508	54	2000	2000	10000

TABLE 6.6 – Cas d'un sol rocailleux : estimation de $P_f = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A})$ par les méthodes de fiabilité.

	FORM	SORM	IS	SS	MC
P_f	$1,5 \times 10^{-1}$	$6,2 \times 10^{-2}$	$[3,6 \times 10^{-2}$; $4,2 \times 10^{-2}]$	$[3,9 \times 10^{-2}$; $4,6 \times 10^{-2}]$	$[3,9 \times 10^{-2}$; $4,3 \times 10^{-2}]$

Au cours de l'approximation FORM, nous avons également obtenu les facteurs d'importance. Ces facteurs permettent de classer l'influence des variables aléatoires d'entrée par rapport à la défaillance du système définie par l'événement : I_{\max} dépasse le seuil de 80 A. Ainsi, pour chaque quadrant d'angle d'azimut, une représentation par camembert de ces facteurs est donnée sur la figure 6.7. Afin de fournir une estimation globale de l'impact des variables d'entrée sur la défaillance du système, nous moyennons les facteurs d'importance associés à

chaque variable sur les 4 quadrants d'angle d'azimut. Par exemple, l'angle ϕ de l'onde EM a une contribution de $\frac{44\% + 2\% + 23\% + 69\%}{4} = 34,5\%$ sur le fait que I_{\max} excède le seuil de 80 A. Les angles θ_e , θ_p et le temps de largeur t_l de l'onde EM contribuent respectivement à hauteur d'environ 17,2 %, 14,5 %, 16,2 %. L'importance de la hauteur h et celle du diamètre d du câble sont plus limitées, i.e. 7 % pour chacune des variables. Enfin, le temps de montée t_m de l'onde EM, la longueur L du câble et la permittivité relative ϵ_r du sol ont un effet négligeable sur le dépassement du seuil considéré.

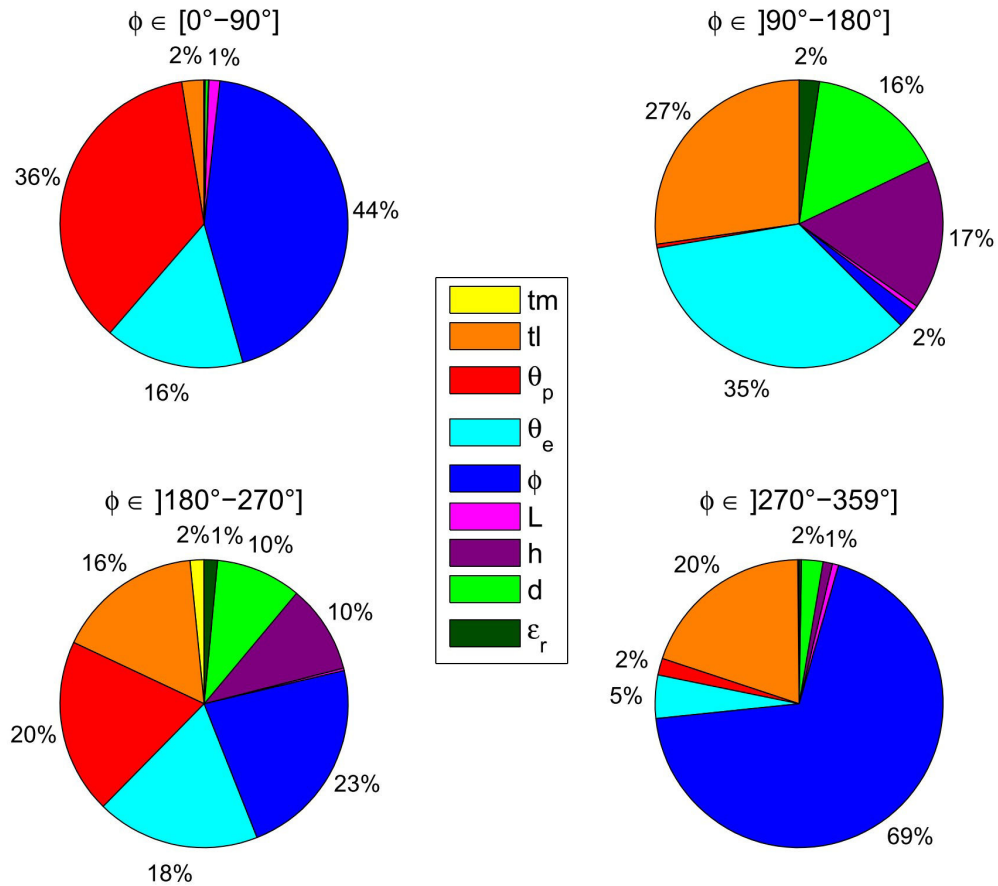


FIGURE 6.7 – Cas d'un sol rocailleux : facteurs d'importance (obtenus par FORM) sur chaque quadrant d'angle d'azimut ϕ .

Cette AS locale met en évidence le fait que les niveaux de courant extrêmes dépendent essentiellement des angles ϕ , θ_e , θ_p et du temps de largeur t_l de l'onde EM. On remarque alors que les variables d'entrée ayant un impact considérable sur le courant I_{\max} , sont les mêmes que celles identifiées par l'AS globale (voir Fig. 6.4). De plus, il est également intéressant de remarquer que l'angle ϕ a un effet très important sur les niveaux de courant extrêmes obtenus sur les quadrants d'azimut $\phi \in [0^\circ; 90^\circ]$, et $\phi \in [270^\circ; 359^\circ]$, comme observé sur la figure 6.6.

Dans la section suivante, nous proposons d'effectuer une nouvelle analyse fiabiliste du couplage onde EM-câble sur un sol en terre, de conductivité $\sigma = 5 \times 10^{-2}$ S/m. L'objectif de cette nouvelle étude est d'étudier l'influence du sol sur les niveaux de couplage extrêmes.

Autrement dit, nous souhaitons vérifier si les variables d'entrée impactant les niveaux de courant extrêmes sont les mêmes que celles identifiées pour un sol rocailleux.

6.3.2 Sol en terre

Dans cette section, nous proposons d'étudier le problème de la section 6.2, pour un câble au dessus d'un sol en terre de conductivité égale à $\sigma = 5 \times 10^{-2}$ S/m.

6.3.2.1 Analyse de sensibilité globale

Comme précédemment, nous commençons par illustrer le comportement du courant I_{\max} en fonction des variables aléatoires d'entrée du problème de la section 6.2. Nous choisissons alors de représenter le courant I_{\max} à partir de 1000 réalisations par simulation de MC sur la figure 6.8. On observe que le courant I_{\max} varie principalement entre 0 A et 95 A. L'augmentation de la conductivité du sol (de $\sigma = 10^{-3}$ S/m à $\sigma = 5 \times 10^{-2}$ S/m) a entraîné une diminution significative des niveaux de courant extrêmes. Ceci s'explique par la réflexion de l'onde EM sur le sol, qui a une contribution plus importante lorsque le sol a une conductivité plus élevée. Puisque les variations du courant I_{\max} ont évolué, il est donc judicieux de quantifier à nouveau l'impact des aléas d'entrée sur I_{\max} , en effectuant une analyse de sensibilité globale. Nous estimons alors les indices de Sobol du 1^{er} ordre et les indices totaux sur la figure 6.9. Nous observons que les variations du courant I_{\max} sont liées aux aléas d'entrée associées aux angles de l'onde EM (ϕ , θ_p et θ_e), puis aux paramètres géométriques (h , L et d) du câble. Le temps de largeur t_l a peu d'influence, tandis que le temps de montée t_m et la permittivité relative du sol ont un rôle négligeable sur la variation du courant. En comparant avec l'AS globale effectuée pour un sol rocailleux (voir Fig. 6.4), on observe que l'effet du sol est différent en raison de la contribution de l'onde EM réfléchie par le sol à la diminution du champ d'excitation sur le câble. Lorsque le câble est proche du sol, les niveaux de courant auront tendance à être plus faibles. Inversement, si le câble est éloignée du sol, l'onde réfléchie tend à moins compenser le champ incident et les niveaux de courant sont plus élevés. Cela explique l'effet plus important attribué aux paramètres géométriques du câble (h , L et d) sur les niveaux de courant pour le sol en terre.

Après l'AS globale, nous proposons d'estimer dans la section suivante, la probabilité de défaillance d'un seuil de 80 A par les méthodes fiabilistes.

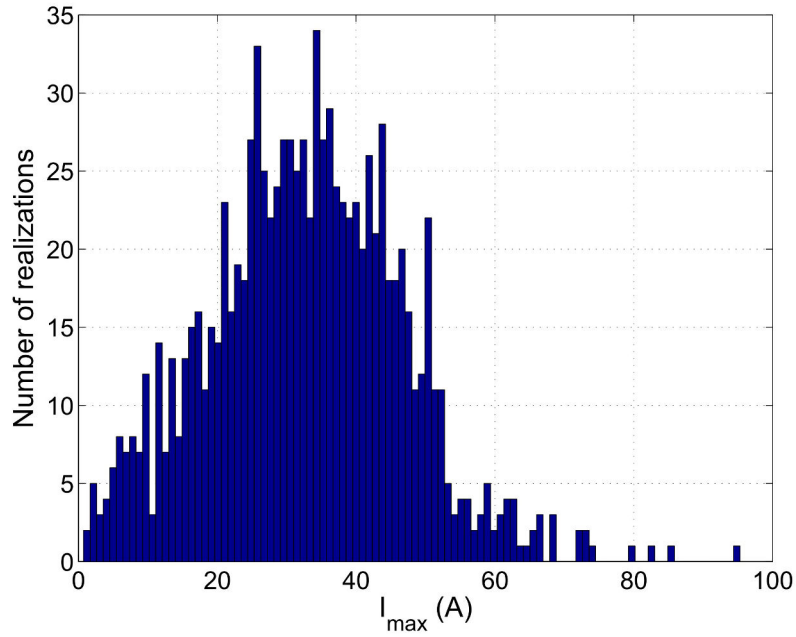


FIGURE 6.8 – Cas d'un sol en terre : représentation du courant I_{\max} à partir de 1000 réalisations par simulation de MC.

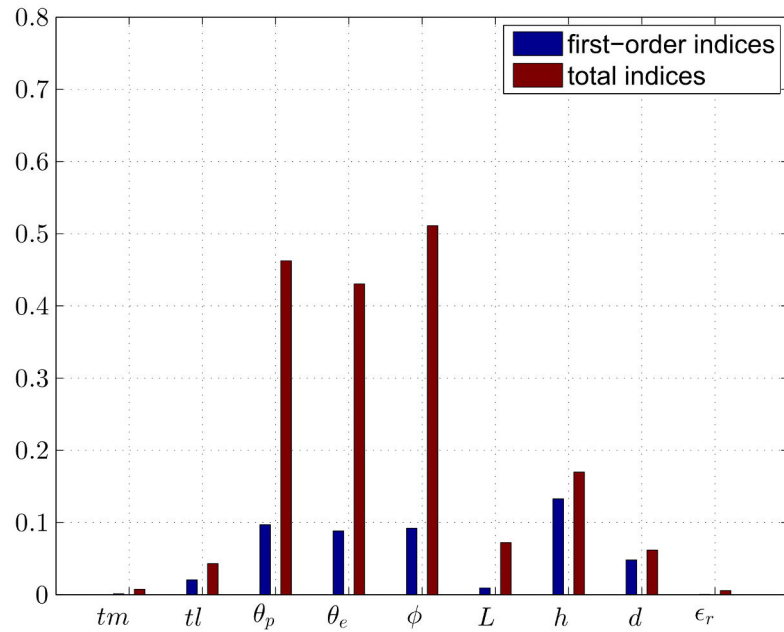


FIGURE 6.9 – Cas d'un sol en terre : analyse de sensibilité globale du courant I_{\max} par indices de Sobol (indices du 1^{er} ordre et indices totaux).

6.3.2.2 Estimation d'une probabilité de défaillance P_f par quadrant d'angle d'azimut de l'onde EM

Dans cette section, nous effectuons une analyse fiabiliste du problème de couplage onde EM-câble au dessus du sol en terre. Comme montré dans la section 6.3.1.2.a, l'angle d'azimut de l'onde EM produit des irrégularités et des non linéarités de la surface d'état-limite (voir Fig. 6.5). Afin de diminuer son effet, nous allons une nouvelle fois effectuer une analyse fiabiliste sur chaque quadrant d'angle d'azimut ϕ .

Comme nous l'avions effectué pour un sol rocailleux, nous allons représenter sur la figure 6.10, le courant I_{\max} sur chaque quadrant d'angle d'azimut à partir de 1000 réalisations par simulation de MC. Sur ces quadrants, nous observons que le courant varie principalement entre 0 A et environ 80 A. De plus, les formes des distributions de probabilité de courant sont assez similaires, contrairement au cas d'un sol rocailleux (voir Fig. 6.6). Nous remarquons également que les niveaux de courant extrêmes sont plus faibles sur les quadrants $\phi \in [0^\circ ; 90^\circ]$ et $\phi \in]270^\circ ; 359^\circ]$, par rapport à ceux observés pour un sol rocailleux sur la figure 6.6.

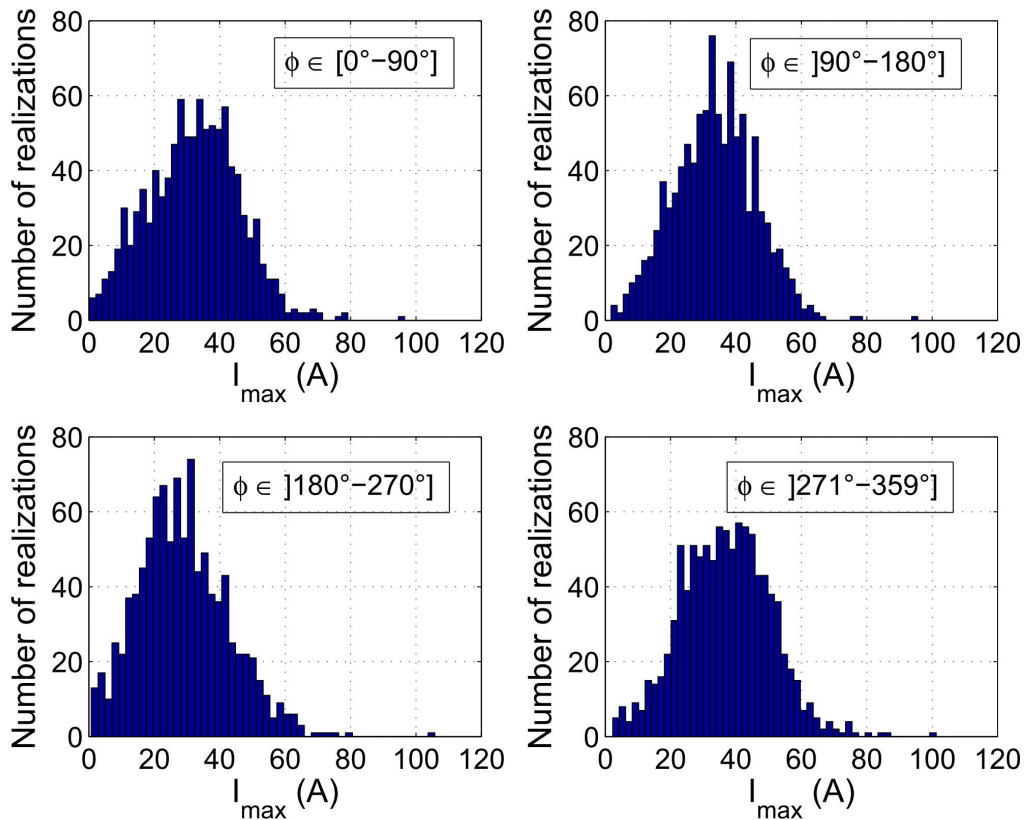


FIGURE 6.10 – Cas d'un sol en terre : histogramme du courant I_{\max} obtenu à partir de 1000 réalisations par simulation de MC sur chaque quadrant d'angle d'azimut ϕ .

Comme précédemment, nous sommes intéressés par l'estimation de la probabilité de dépassement du seuil de 80 A, notée $P_f = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A})$. Nous appliquons alors les méthodes fiabilistes FORM, SORM, IS et SS pour estimer les probabilités de défaillance P_{f1} , P_{f2} , P_{f3} et P_{f4} définies sur chaque quadrant d'angle d'azimut. Les résultats obtenus ainsi que les nombres

d'appels au modèle n_1 , n_2 , n_3 et n_4 associés à chaque quadrant d'angle d'azimut, sont donnés sur les tables 6.7, 6.8, 6.9 et 6.10. La probabilité de défaillance $P_f = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A})$ est estimée sur la table 6.11, en moyennant l'ensemble des résultats obtenus sur chaque quadrant d'angle d'azimut. Nous remarquons un écart significatif entre l'estimation fournie par FORM ($P_{f,\text{FORM}} = 4,9 \times 10^{-2}$) et le résultat de référence obtenu à partir de 10000 réalisations par simulation de MC ($P_{f,\text{MC}} = [2,3 \times 10^{-3} ; 3,3 \times 10^{-3}]$). Cet écart montre que la méthode FORM peine à approximer correctement le domaine de défaillance, en raison de l'irrégularité de la surface d'état-limite au voisinage du point de conception. Ces irrégularités de la surface d'état-limite semblent également se confirmer par une convergence lente de la méthode FORM, qui se traduit par un nombre important d'appels au modèle. L'approximation SORM quant à elle, fournit une estimation $P_{f,\text{SORM}} = 5,5 \times 10^{-3}$ plus proche du résultat de référence. Ceci met en évidence les difficultés de ces méthodes à estimer correctement la surface d'état-limite au voisinage du point de conception, même si la complexité de cette dernière a été réduite en effectuant l'analyse par quadrant d'angle d'azimut. Nous avons alors recours à une estimation de P_f par les méthodes IS et SS, qui fournissent $P_{f,\text{IS}} = [2,2 \times 10^{-3} ; 3,0 \times 10^{-3}]$ et $P_{f,\text{SS}} = [1,9 \times 10^{-3} ; 3,1 \times 10^{-3}]$ à l'aide de 2000 évaluations du modèle. Les estimations obtenues sont encore une fois de meilleure qualité que celles issues des approximations FORM et SORM, étant donné leurs robustesses lorsqu'il s'agit d'appréhender une surface d'état-limite complexe. On remarque que les estimations de P_f sont beaucoup plus faibles sur le sol en terre ($P_{f,\text{MC}} \approx 2,8 \times 10^{-3}$, voir la table 6.11) que sur le sol rocailleux ($P_{f,\text{MC}} \approx 4,1 \times 10^{-2}$, voir la table 6.12). Comme discuté précédemment, ces différences de niveau extrême de courant s'expliquent par l'impact de l'onde EM réfléchi sur le sol qui tend à diminuer le champ d'excitation sur le câble.

En complément de l'estimation de P_f , nous représentons sur la figure 6.11, les facteurs d'importance obtenus lors de l'approximation FORM. Une représentation par camembert de ces facteurs est donnée sur chaque quadrant d'angle d'azimut. Ils quantifient la contribution de chaque variable d'entrée sur la défaillance du système. La contribution globale de chaque variable d'entrée est obtenue en moyennant sa part sur l'ensemble des 4 quadrants d'angle d'azimut. Ainsi, les impacts des angles θ_e , ϕ et θ_p de l'onde EM sont respectivement de 21,75 %, 21,5 % et 14,5 % sur la défaillance du système. Les contributions des paramètres géométriques (L , h , d) du câble sont respectivement estimées à 20,5 %, 17,5 % et 2,75 %. Enfin, le temps de largeur t_l de l'onde EM a un impact de 1,25 % sur le dépassement du seuil considéré, tandis que le temps de montée t_m et la permittivité du sol ϵ_r ont un effet négligeable. Ces facteurs d'importance montrent à nouveau un rôle majeur des angles de l'onde EM sur les niveaux extrêmes de courant. Contrairement au cas où le sol est considéré comme rocailleux (Fig. 6.7), un effet plus significatif est attribué aux paramètres géométriques (L , h) du câble.

TABLE 6.7 – Cas d'un sol en terre : estimation de $P_{f_1} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A} \mid \phi \in [0^\circ ; 90^\circ])$ par les méthodes de fiabilité.

	FORM	SORM	IS	SS	MC
P_{f_1}	$6,3 \times 10^{-2}$	$6,2 \times 10^{-3}$	$[2,4 \times 10^{-3} ; 3,5 \times 10^{-3}]$	$[1,6 \times 10^{-3} ; 2,6 \times 10^{-3}]$	$[2,6 \times 10^{-3} ; 3,7 \times 10^{-3}]$
n_1	1740	54	2000	2000	10000

TABLE 6.8 – Cas d'un sol en terre : estimation de $P_{f_2} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A} \mid \phi \in]90^\circ; 180^\circ])$ par les méthodes de fiabilité.

	FORM	SORM	IS	SS	MC
P_{f_2}	$5,5 \times 10^{-3}$	$1,3 \times 10^{-3}$	$[1,4 \times 10^{-3}$; $1,8 \times 10^{-3}]$	$[1,2 \times 10^{-3}$; $2,0 \times 10^{-3}]$	$[1,2 \times 10^{-3}$; $2,0 \times 10^{-3}]$
n_2	1948	54	2000	3089	10000

TABLE 6.9 – Cas d'un sol en terre : estimation de $P_{f_3} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A} \mid \phi \in]180^\circ; 270^\circ])$ par les méthodes de fiabilité.

	FORM	SORM	IS	SS	MC
P_{f_3}	$7,7 \times 10^{-2}$	$1,3 \times 10^{-2}$	$[1,6 \times 10^{-3}$; $2,4 \times 10^{-3}]$	$[2,1 \times 10^{-3}$; $3,6 \times 10^{-3}]$	$[2,9 \times 10^{-3}$; $4,0 \times 10^{-3}]$
n_3	1788	54	2000	2088	10000

TABLE 6.10 – Cas d'un sol en terre : estimation de $P_{f_4} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A} \mid \phi \in]270^\circ; 359^\circ])$ par les méthodes de fiabilité.

	FORM	SORM	IS	SS	MC
P_{f_4}	$4,9 \times 10^{-2}$	$1,6 \times 10^{-3}$	$[3,2 \times 10^{-3}$; $4,3 \times 10^{-3}]$	$[2,7 \times 10^{-3}$; $4,3 \times 10^{-3}]$	$[2,4 \times 10^{-3}$; $3,4 \times 10^{-3}]$
n_4	1580	54	2000	2000	10000

TABLE 6.11 – Cas d'un sol en terre : estimation de $P_f = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A})$ par les méthodes de fiabilité.

	FORM	SORM	IS	SS	MC
P_f	$4,9 \times 10^{-2}$	$5,5 \times 10^{-3}$	$[2,2 \times 10^{-3}$; $3,0 \times 10^{-3}]$	$[1,9 \times 10^{-3}$; $3,1 \times 10^{-3}]$	$[2,3 \times 10^{-3}$; $3,3 \times 10^{-3}]$

TABLE 6.12 – Cas d'un sol rocaillieux : estimation de $P_f = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80 \text{ A})$ par les méthodes de fiabilité.

	FORM	SORM	IS	SS	MC
P_f	$1,5 \times 10^{-1}$	$6,2 \times 10^{-2}$	$[3,6 \times 10^{-2}$; $4,2 \times 10^{-2}]$	$[3,9 \times 10^{-2}$; $4,6 \times 10^{-2}]$	$[3,9 \times 10^{-2}$; $4,3 \times 10^{-2}]$

6.3.3 Conclusion sur les méthodes fiabilistes

Cette section a permis à travers une analyse fiabiliste, d'étudier le courant à l'extrémité d'un câble illuminé par une onde EM en considérant des paramètres d'entrée incertains. Une première étude a été effectuée pour un câble au dessus d'un sol rocaillieux, de conductivité $\sigma = 10^{-3} \text{ S/m}$. Cette analyse a permis de quantifier une probabilité de dépassement d'un seuil extrême en prenant en compte les aléas d'entrée du problème de couplage. En complément, une AS globale et les facteurs d'importance FORM ont respectivement montré que : les angles

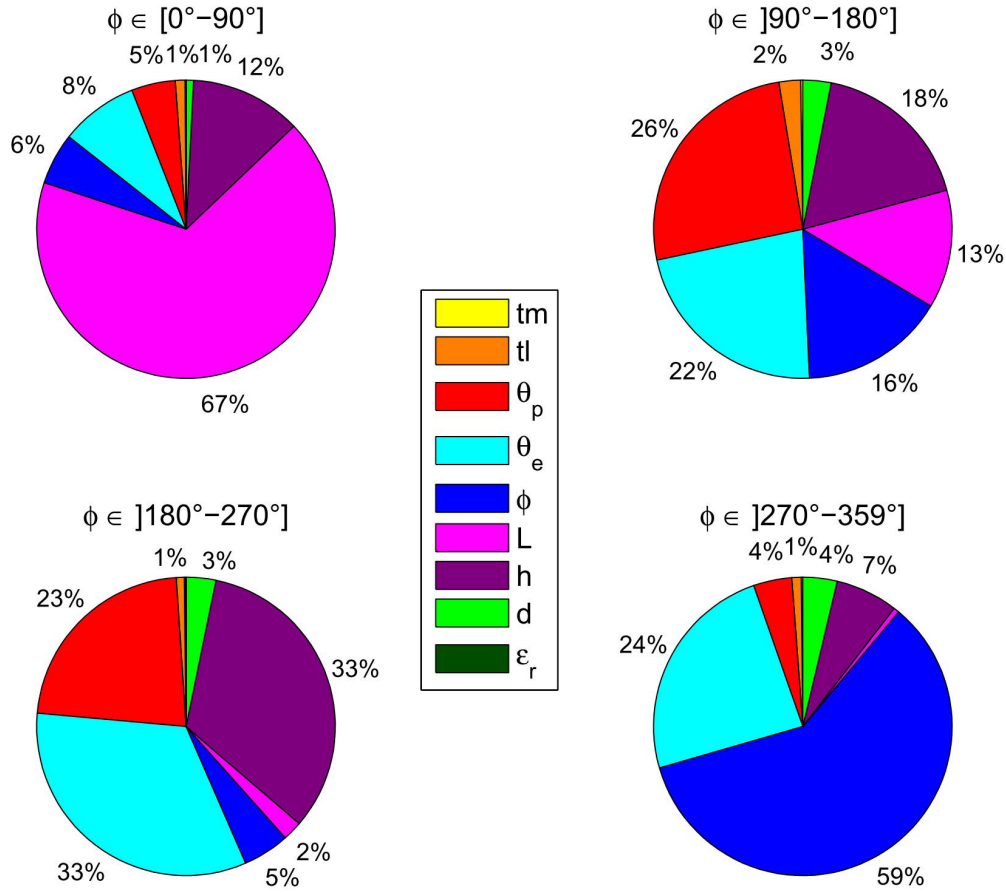


FIGURE 6.11 – Cas d'un sol en terre : facteurs d'importance (issus de l'approximation FORM) sur chaque quadrant d'azimut ϕ .

(ϕ , θ_p et θ_e) et le temps de largeur t_l de l'onde EM ont le plus d'impact sur la variabilité du courant et la défaillance du système. Les paramètres géométriques (L , h et d) du câble ont un effet moindre, tandis que le temps de montée t_m et la permittivité relative ϵ_r ont un rôle négligeable sur les variations du courant.

Une seconde étude a également été effectuée en considérant le câble au dessus d'un sol en terre (de conductivité $\sigma = 5 \times 10^{-2}$ S/m). Le but de cette étude était d'étudier l'influence de la nature du sol sur les niveaux de courant. De ce fait, l'AS globale et les facteurs d'importance FORM ont montré cette fois, que la variabilité du courant et la défaillance du système dépendent essentiellement des angles (ϕ , θ_p et θ_e) de l'onde EM et des paramètres géométriques (L , h et d) du câble. L'impact des paramètres géométriques du câble sur les niveaux de courant est dans ce cas non négligeable, en raison d'une contribution plus significative de l'onde EM réfléchie sur le sol.

Dans cette section, nous nous sommes appuyés sur un modèle basé sur la TLT. Le but de la section suivante est alors d'estimer des niveaux extrêmes d'interférences en ayant recours à un modèle plus rigoureux dans le contexte d'une approche par stratification contrôlée (SC).

6.4 Application de la méthode de stratification contrôlée (SC) au problème de couplage onde EM-câble

6.4.1 Introduction

Dans cette section nous traitons de la prise en compte d'incertitudes sur les paramètres d'entrée du problème de couplage onde EM-câble (cf. section 6.2), mais en nous appuyant sur un modèle rigoureux pour la résolution numérique des équations de Maxwell. Lors de l'analyse du couplage par l'AS globale et les méthodes fiabilistes, nous nous sommes appuyés sur un modèle simple basé sur l'approximation des lignes de transmission. Cependant, ce problème peut être résolu plus rigoureusement en résolvant directement les équations de Maxwell sous réserve d'une description exacte des conditions aux limites (sol, câble...). Ce type de résolution passe cependant par la discrétisation numérique de ces équations, processus coûteux en temps de calcul et en ressources mémoire.

Ainsi, nous nous intéressons à une approche permettant de quantifier des niveaux d'interférences extrêmes en faisant appel de manière limitée à un modèle rigoureux. L'approche par stratification contrôlée (SC) est donc utilisée dans cette section. Cette technique s'appuie sur la combinaison entre le modèle TLT (modèle simplifié) et le modèle complexe (résolution directe des équations de Maxwell) dans le but de prédire un quantile extrême (e.g. de niveau 99 %) de la réponse d'intérêt en réduisant le nombre d'appels au modèle rigoureux et donc le temps de calcul associé.

6.4.2 Présentation des modèles simple et rigoureux

Dans cette section, nous souhaitons estimer les valeurs extrêmes du courant I_{\max} par une approche de SC en s'appuyant sur un modèle simple et un modèle rigoureux.

Le modèle simple choisi est celui qui a été utilisé lors de l'analyse fiabiliste (cf. section 6.3). Il est basé sur la TLT et s'appuie sur le formalisme de Vance [2]. Il considère l'influence du sol réel de conductivité σ dans le calcul des paramètres linéiques de la ligne de transmission. Il prend également en compte l'effet des brins verticaux et néglige l'existence des modes différents du mode TEM (absence du re-rayonnement de la ligne). De plus, il considère une connexion parfaitement conductrice à l'interface du fil vertical et du sol réel (i.e. au niveau du courant I_{\max}), quelle que soit la conductivité de ce dernier.

Comme modèle rigoureux, nous choisissons un code de calcul du CEA/Gramat (intégré à la plateforme Quercy) appelé GORF3D, qui est basé sur un schéma de type DFDT (différences finies dans le domaine temporel) pour la résolution des équations de Maxwell [4–6]. En termes de temps de calcul, le modèle simple TLT évalue le courant I_{\max} en 0.1 s, tandis que GORF3D a besoin d'environ 30 min (en fonction de la géométrie du câble). Dans la suite du chapitre, le modèle simple et le modèle rigoureux seront respectivement notés TLT et GORF.

Par ailleurs, les AS globales et les facteurs d'importance (cf. section 6.3) ont montré que le temps de montée t_m de l'onde EM, et la permittivité relative ϵ_r du sol ont un impact négligeable sur la variabilité du courant I_{\max} . Pour cette raison, nous proposons de fixer ces paramètres tels que : $t_m = 20$ ns, et $\epsilon_r = 1$. Les autres variables aléatoires d'entrée du problème de la section 6.2 restent inchangées. Nous traitons alors le problème de couplage avec un vecteur aléatoire d'entrée $\mathbf{X} = \{t_l, \theta_p, \theta_e, \phi, L, h, d\}$ contenant 7 variables aléatoires.

6.4.3 Sol rocailleux : estimation de quantile extrême de courant

Dans cette section, le câble est considéré au dessus d'un sol rocailleux, de conductivité $\sigma = 10^{-3}$ S/m.

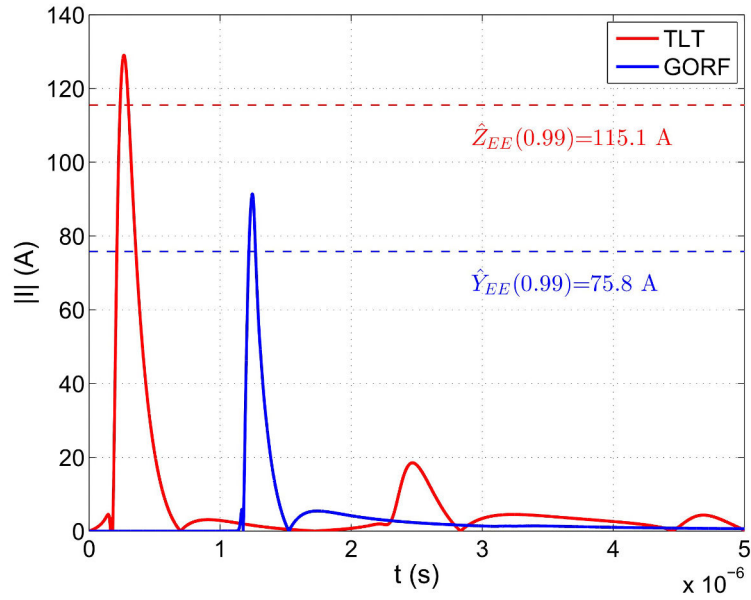
6.4.3.1 Estimation de la corrélation entre les modèles simple et rigoureux

Dans le but d'illustrer le comportement des courants $|I|$ calculés par TLT et par GORF, nous choisissons de les évaluer pour une même réalisation aléatoire des 7 variables d'entrée. En choisissant une configuration aléatoire des paramètres d'entrée, nous représentons l'évolution temporelle des courants $|I|$ calculés par TLT (courbe rouge, voir Fig. 6.12(a)) et par GORF (courbe bleue, voir Fig. 6.12(a)). On observe que le niveau maximum de courant $|I|$ évalué par TLT, est plus élevé que celui calculé par GORF. De plus, les pics de courant se produisent avec un décalage temporel qui n'a aucune signification physique (la référence temporelle utilisée dans TLT et GORF est différente). La différence d'amplitude maximale de courant entre les 2 modèles, s'explique par le fait que le modèle simple utilisé considère une connexion parfaitement conductrice, à l'interface du fil vertical et du sol (i.e. à l'endroit où le courant $|I|$ est calculé).

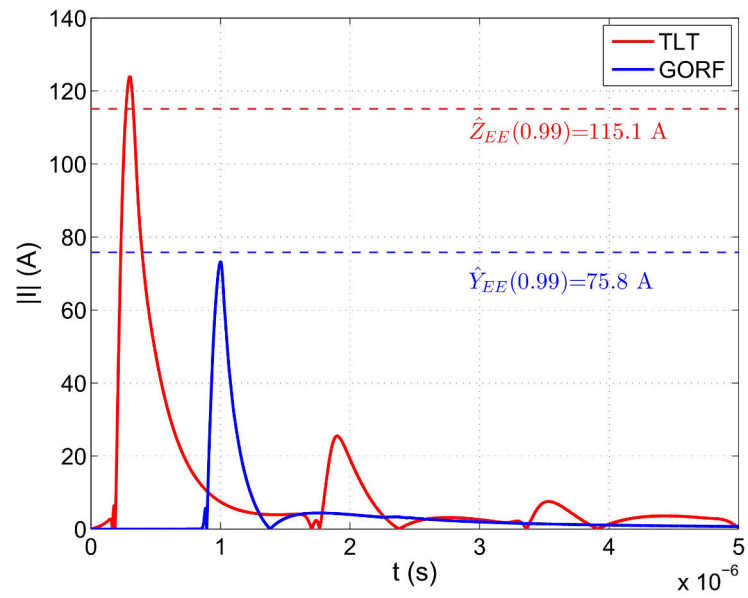
Nous estimons d'abord les quantiles de référence à partir d'estimations empiriques avec un échantillon de taille importante. Les quantiles de niveau 99 % de TLT ($\hat{Z}_{EE}(0,99) = 115,1$ A) et de GORF ($\hat{Y}_{EE}(0,99) = 75,8$ A) sont respectivement calculés à partir de 10000 et de 1000 réalisations par simulation de MC. Il est à noter qu'il n'est pas possible d'effectuer 10000 calculs avec GORF en raison du temps de calcul trop coûteux. On remarque que ces quantiles sont très différents. En observant la figure 6.12(a), on s'aperçoit que pour cette configuration particulière de réalisations d'entrée, les niveaux maximums de courant $|I|$ évalués par TLT et par GORF, i.e. $z_{\max} = 129,0$ A et $y_{\max} = 91,4$ A, sont plus élevés que leur quantile de niveau 99 % . Ceci met en évidence que la corrélation $\hat{\rho}_I(0,99)$ (5.14) entre les deux modèles de calcul n'est pas négligeable.

En effectuant une nouvelle simulation avec TLT et avec GORF pour une autre configuration aléatoire de réalisations d'entrée, nous observons que les courants $|I|$ évalués par TLT (courbe rouge, voir Fig. 6.12(b)) et par GORF (courbe bleue, voir Fig. 6.12(b)) sont cette fois différents vis-à-vis de leur quantile de niveau 99 %. D'une part, $z_{\max} = 123,9$ A est supérieur au quantile de niveau 99 % calculé pour TLT, i.e. $\hat{Z}_{EE}(0,99) = 115,1$ A. D'autre part, $y_{\max} = 73,2$ A est inférieur au quantile de niveau 99 % obtenu pour GORF, i.e. $\hat{Y}_{EE}(0,99) = 75,8$ A. Cela montre que la corrélation $\hat{\rho}_I(0,99)$ n'est pas parfaite. Afin de mesurer la tendance entre TLT et GORF au voisinage de leur quantile, une estimation du coefficient de corrélation $\hat{\rho}_I(0,99) = 0,8$ a été obtenue à partir de 1000 réalisations par simulation de MC. Cette estimation de la corrélation montre que le modèle TLT devrait permettre d'identifier un nombre très significatif de réalisations d'entrée fournissant des valeurs extrêmes de courant avec le modèle rigoureux GORF. Notons que si l'on sait a priori que le modèle simple est fiable sur le plan de la corrélation, alors cette procédure n'a pas besoin d'être renouvelée, et la méthode de SC peut être appliquée directement.

La section suivante a pour objectif d'appliquer la méthode de SC pour estimer le quantile d'ordre 99 % du courant I_{\max} , à l'extrémité du câble illuminé par l'onde EM.



(a)



(b)

FIGURE 6.12 – Cas d'un sol rocailleux : évolution temporelle de l'amplitude du courant $|I|$ à l'extrémité du câble. Deux configurations aléatoires de variables d'entrée sont considérées en (a) et (b) pour le calcul de $|I|$ avec le modèle simple TLT (courbe rouge) et avec le modèle rigoureux GORF (courbe bleue).

6.4.3.2 Approche par SC

Dans cette section, nous souhaitons appliquer la méthode de SC. Nous proposons de sélectionner 50 réalisations par strates à partir du modèle simple TLT. Pour cela, nous évaluons les quantiles de TLT à partir de 10000 réalisations de \mathbf{X} par simulation de MC :

$$\begin{cases} \alpha = 0,5 \longrightarrow z_\alpha = 33,5 \text{ A} \\ \alpha = 0,9 \longrightarrow z_\alpha = 66,9 \text{ A} \\ \alpha = 0,99 \longrightarrow z_\alpha = 115,1 \text{ A}. \end{cases}$$

Supposons que le quantile d'ordre $\alpha = 0,99$ doive être estimé avec au maximum $n = 200$ appels au modèle rigoureux GORF. Ainsi, en utilisant $n = 200$ calculs de GORF, une estimation du quantile d'ordre 99 % par SC fournit $\hat{Y}_{SC}(0,99) = 72,0$ A. Il est à noter qu'une seule estimation par SC est effectuée en raison du temps de calcul très coûteux. La qualité de l'estimation par SC est assez satisfaisante car elle est assez proche du quantile empirique de référence donné à partir de 1000 réalisations par simulation de MC : $\hat{Y}_{EE}(0,99) = 75,8$ A. Nous sommes également intéressés par examiner le niveau de corrélation entre TLT et GORF. Pour cela, nous représentons sur la figure 6.13, les réalisations du courant I_{\max} obtenues dans la 4^{ème} strate, i.e. où $Z > z_{0,99} = 115,1$ A. L'histogramme représente la probabilité d'occurrence des valeurs de courant observées dans la 4^{ème} strate du domaine de la réponse Y . A partir de la figure 6.13, nous vérifions qu'un nombre important de valeurs extrêmes de courant est atteint. En effet, parmi les 50 valeurs de courant I_{\max} calculées, 48 d'entre-elles sont supérieures au quantile $\hat{Y}_{SC}(0,99) = 72,0$ A. En observant ces valeurs extrêmes, il est intéressant de comparer la valeur maximale de courant obtenue sur la figure 6.13, et celle calculée avec l'échantillon de 1000 réalisations par simulation de MC avec GORF (échantillon utilisé pour l'estimation du coefficient de corrélation). Ainsi, cette comparaison montre que ces 50 calculs effectués ont permis d'identifier une valeur maximale de 125,7 A, alors que l'approche par simulation de MC avec un échantillon de taille importante a fourni un niveau maximum de 104,5 A. Cela met en évidence que même si le modèle TLT fournit des résultats très différents de GORF, il est capable de déterminer des réalisations d'entrée pertinentes fournissant des cas très extrêmes avec le modèle rigoureux GORF.

Observons les réalisations d'entrée qui ont permis d'obtenir ces 48 valeurs extrêmes de courant avec le modèle rigoureux GORF. Une représentation par histogramme de ces réalisations d'entrée est donnée sur la figure 6.14.

Nous remarquons alors que les valeurs extrêmes de courant sont obtenues pour des configurations particulières d'angles de l'onde EM. En effet, nous observons que ces cas extrêmes sont essentiellement obtenus sur la 1^{ère} moitié du quadrant de l'angle de polarisation θ_p ($[0^\circ; 45^\circ]$), avec un angle d'élévation θ_e généralement compris dans $[10^\circ; 45^\circ]$, et pour un angle d'azimut proche de l'axe du câble ($\phi \approx 0^\circ$ ou $\phi \approx 359^\circ$). Les réalisations du temps de largeur t_l de l'onde EM sont principalement élevées, avec environ 90 % des valeurs supérieures à la moyenne du domaine initial : 225 ns. La longueur L du câble fournit des valeurs extrêmes pour des réalisations supérieures à environ 200 m, tandis que la hauteur h et le diamètre d semblent au contraire uniformément réparties sur leurs intervalles respectifs.

Ces tendances montrent alors un impact majeur des angles θ_p , θ_e et ϕ de l'onde EM sur les niveaux de couplage extrêmes. Le temps de largeur t_l semble avoir un effet significatif alors que les paramètres géométriques du câble semblent avoir peu d'influence sur les niveaux extrêmes d'interférences.

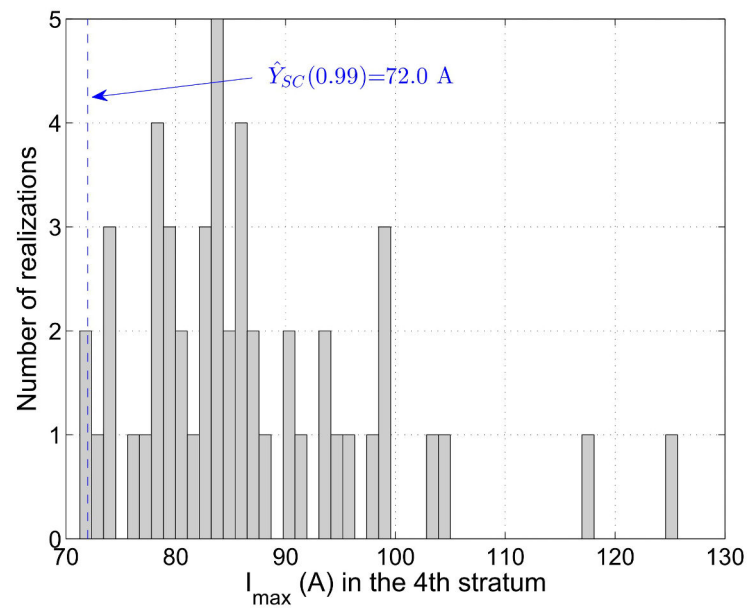
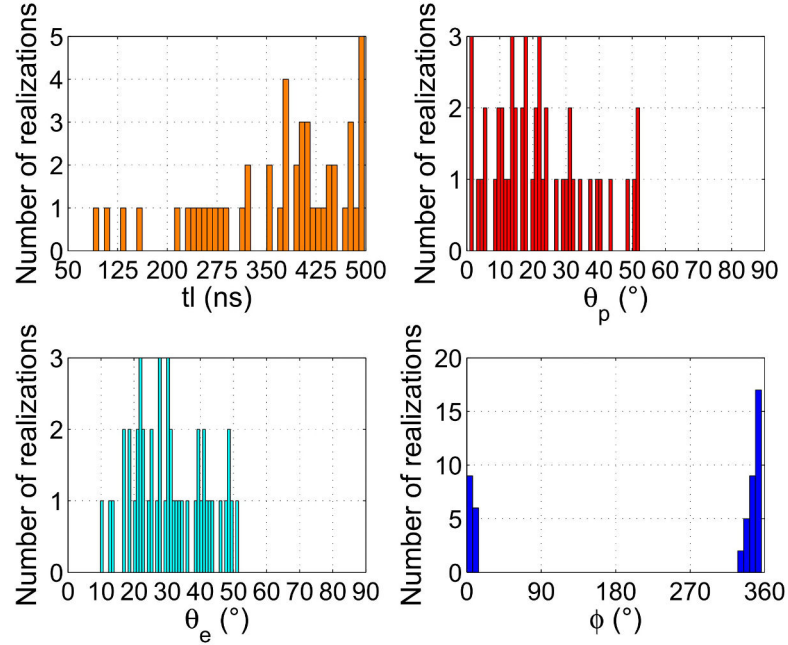
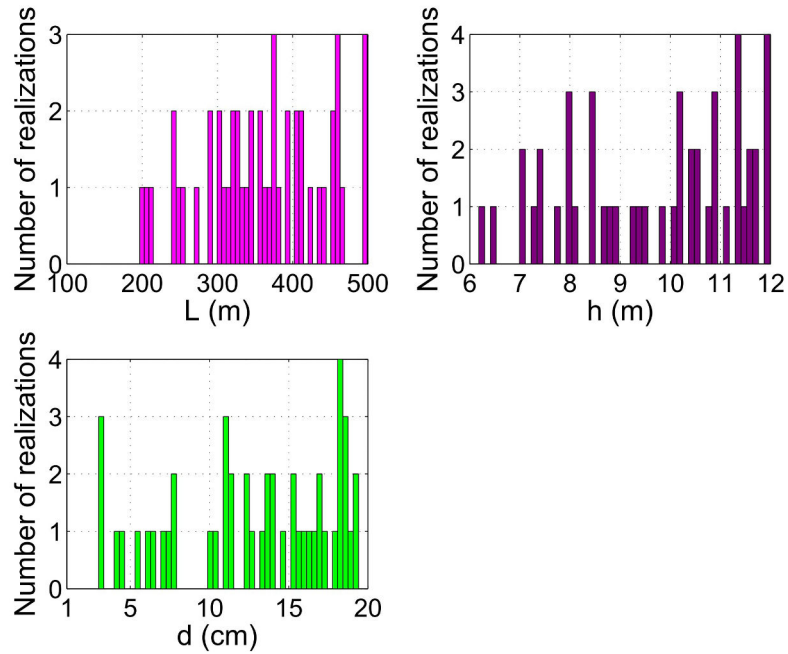


FIGURE 6.13 – Cas d'un sol rocailleux : histogramme représentant le nombre de réalisations de courant I_{\max} obtenu dans la 4^{ème} strate. Parmi les 50 valeurs de courant calculées, 48 valeurs sont supérieures au quantile $\hat{Y}_{SC}(0.99) = 72,0$ A du modèle rigoureux GORF.



(a)



(b)

FIGURE 6.14 – Cas d'un sol rocailloux : réalisations d'entrée (a) des paramètres incertains de l'onde EM et (b) des paramètres géométriques incertains du câble fournissant des valeurs extrêmes de courant I_{\max} avec le modèle rigoureux GORF.

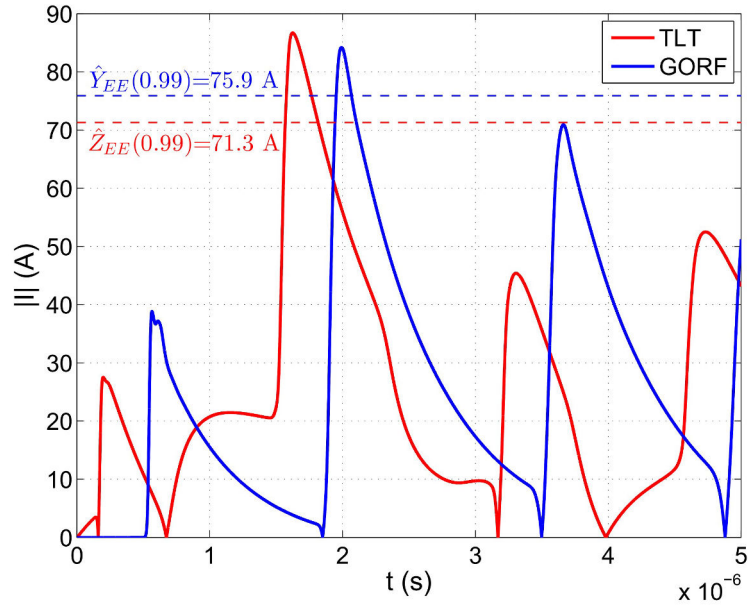
6.4.4 Sol en terre : estimation de quantile extrême de courant

Dans cette section, nous considérons le câble au dessus d'un sol en terre de conductivité $\sigma = 5 \times 10^{-2}$ S/m. Comme précédemment, le but est d'estimer le quantile d'ordre 99 % du courant I_{\max} avec le modèle rigoureux GORF. A travers cette étude, nous souhaitons évaluer l'influence du sol sur les niveaux extrêmes de courant.

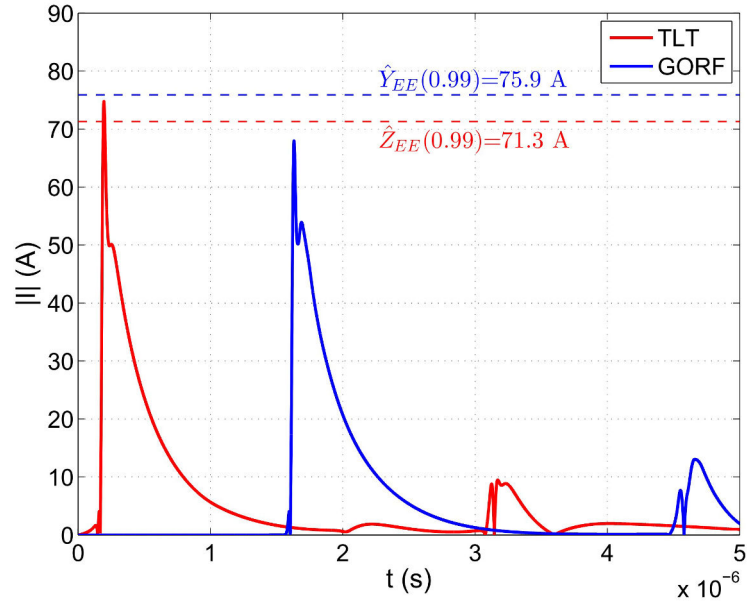
6.4.4.1 Estimation de la corrélation entre les modèles simple et rigoureux

Comme dans la section 6.4.3.1, nous souhaitons illustrer à nouveau la différence entre les modèles simple et rigoureux. Par conséquent, pour les mêmes réalisations d'entrée, nous représentons les courants $|I|$ dans le domaine temporel avec TLT (courbe rouge, voir Fig. 6.15(a)) et avec GORF (courbe bleue, voir Fig. 6.15(a)). Une fois encore, nous observons une tendance similaire entre les 2 courbes avec un décalage temporel qui n'a aucune signification physique, et des niveaux d'amplitude différents des pics de courant. De plus, nous avons également évalué les quantiles de niveau 99 % de TLT ($\hat{Z}_{EE}(0,99) = 71,3$ A) et de GORF ($\hat{Y}_{EE}(0,99) = 75,9$ A) respectivement à partir de 10000 et de 1000 réalisations par simulation de MC. Nous constatons que les quantiles de niveau 99 % de TLT et GORF sont différents, mais plus proches que dans le cas d'un sol rocailleux. Cela s'explique en partie par l'augmentation de la conductivité, de $\sigma = 10^{-3}$ S/m à $\sigma = 5 \times 10^{-2}$ S/m. En effet, dans le modèle TLT, la connexion entre le fil vertical et le sol (au niveau du courant I_{\max}) est considérée comme parfaitement conductrice. Cela implique que pour un sol de conductivité plus élevé, l'erreur commise par le modèle TLT soit moins importante. Sa réponse tend à se rapprocher de celle du modèle rigoureux GORF. Cependant, nous pouvons voir sur la figure 6.15(a) que les niveaux maximums des 2 courbes $z_{\max} = 86,7$ A et $y_{\max} = 84,2$ A, respectivement calculés par TLT et par GORF, sont supérieurs à leur quantile de niveau 99 %. Cette configuration montre encore qu'il existe un certain niveau de corrélation $\hat{\rho}_I(0,99)$ entre les deux modèles.

En effectuant des simulations pour une autre configuration aléatoire des variables d'entrée, les courants $|I|$ obtenus par TLT (courbe rouge, voir Fig. 6.15(b)) et par GORF (courbe bleue, voir Fig. 6.15(b)) sont cette fois plutôt différents vis-à-vis de leur quantile de niveau 99 %. D'un côté, $z_{\max} = 74,8$ A est supérieur au quantile de niveau 99 % associé, $\hat{Z}_{EE}(0,99) = 71,3$ A. De l'autre, $y_{\max} = 68,0$ A est inférieur au quantile de niveau 99 % correspondant, $\hat{Y}_{EE}(0,99) = 75,9$ A. Pour quantifier la similitude entre TLT et GORF autour de leur quantile respectif de niveau 99 %, nous avons estimé le coefficient de corrélation $\hat{\rho}_I(0,99) = 0,3$ à partir de 1000 réalisations par simulation de MC. Dans ce cas, le niveau de corrélation entre les modèles simple et rigoureux est toujours significatif, mais moins élevé que pour un sol rocailleux. Cela devrait également permettre d'identifier des réalisations d'entrée pertinentes, pour l'estimation du quantile de courant de niveau 99 % avec le modèle rigoureux. Cette étude est effectuée dans la section suivante.



(a)



(b)

FIGURE 6.15 – Cas d'un sol en terre : évolution temporelle de l'amplitude du courant $|I|$ à l'extrémité du câble. Deux réalisations des variables aléatoires d'entrée sont utilisées en (a) et (b) pour l'évaluation de $|I|$ avec le modèle simple TLT (courbe rouge) et avec le modèle rigoureux GORF (courbe bleue).

6.4.4.2 Estimation par SC

Comme mentionné précédemment, nous souhaitons estimer par SC le quantile d'ordre 99 % avec le modèle rigoureux GORF. Nous sélectionnons alors 50 réalisations par strates avec le modèle simple TLT. Afin de définir ces strates, nous calculons les quantiles de TLT par simulation de MC avec 10000 réalisations de \mathbf{X} comme suit :

$$\begin{cases} \alpha = 0,5 \longrightarrow z_\alpha = 33,1 \text{ A} \\ \alpha = 0,9 \longrightarrow z_\alpha = 51,7 \text{ A} \\ \alpha = 0,99 \longrightarrow z_\alpha = 71,3 \text{ A}. \end{cases}$$

Nous cherchons encore à estimer le quantile d'ordre 99 % avec au maximum, $n = 200$ appels au modèle rigoureux GORF. En ayant recours à ces $n = 200$ calculs de GORF, l'estimation du quantile d'ordre 99 % obtenue par SC est $\hat{Y}_{SC}(0,99) = 77,1 \text{ A}$. On s'aperçoit alors que cette estimation par SC est de bonne qualité dans la mesure où elle est proche du quantile empirique de référence obtenu à partir de 1000 réalisations par simulation de MC, $\hat{Y}_{EE}(0,99) = 75,9 \text{ A}$. Nous analysons également le niveau de corrélation entre TLT et GORF. Ainsi, nous illustrons sur la figure 6.16, les réalisations du courant I_{\max} calculées dans la 4^{ème} strate, où $Z > z_{0,99} = 71,3 \text{ A}$. L'histogramme représente la probabilité d'occurrence des valeurs de courant observées dans la 4^{ème} strate de l'espace de la sortie Y de GORF. La figure 6.16 montre alors qu'un nombre significatif de valeurs extrêmes de courant est identifié : sur les 50 réponses de courant I_{\max} calculées, 18 valeurs sont supérieures au quantile $\hat{Y}_{SC}(0,99) = 77,1 \text{ A}$, ce qui est évidemment bien moins spectaculaire que dans le cas du sol rocailleux pour lequel la corrélation $\hat{\rho}_I(0,99)$ était plus élevée. Comme pour le sol rocailleux, nous souhaitons comparer le niveau maximum de courant obtenu par l'approche de SC dans la 4^{ème} strate, et celui calculé par l'approche de simulation de MC avec un échantillon de taille importante. Nous remarquons que le niveau maximum de courant I_{\max} de la figure 6.16 est de 100,6 A, alors que celui obtenu à partir de 1000 réalisations par simulation de MC est de 93,9 A. L'approche par SC a une nouvelle fois, permis d'obtenir un cas très extrême, non identifié par un échantillonnage de MC de taille importante. Ceci souligne encore la capacité du modèle simple TLT à identifier des réalisations d'entrée qui fournissent des cas très rares avec le modèle rigoureux GORF.

Nous nous sommes également intéressés aux réalisations d'entrée qui ont fourni ces 18 cas extrêmes de courant avec GORF. Une illustration par histogramme de ces réalisations d'entrée est donnée sur la figure 6.17. On remarque à nouveau que les cas extrêmes de courant se produisent pour des réalisations d'entrée comprises sur la 1^{ère} moitié du quadrant de l'angle θ_p ($[0^\circ; 35^\circ]$), avec une incidence θ_e rasante (inférieure à 30°). Par contre, les réalisations de l'angle d'azimut ϕ sont très différentes car elles apparaissent au voisinage de 3 valeurs : 0° , 90° et 270° . Les réalisations du temps de largeur t_l sont particulièrement élevées : plus de 90 % des valeurs sont supérieures à la moyenne du domaine initial, soit 225 ns. En ce qui concerne les paramètres géométriques du câble, la longueur L est toujours supérieure à 180 m, et on remarque qu'autour de 90 % des réalisations de la hauteur h et du diamètre d sont supérieures à leurs moyennes respectives (9 m et 10,5 cm).

L'observation de ces réalisations d'entrée montre un rôle important des angles θ_p , θ_e et ϕ sur les cas extrêmes d'interférences. Le temps de largeur t_l , et les paramètres géométriques L , h et d du câble semblent également avoir un effet significatif sur les niveaux extrêmes de couplage. Ces observations rejoignent les conclusions établies au cours de l'analyse fiabiliste.

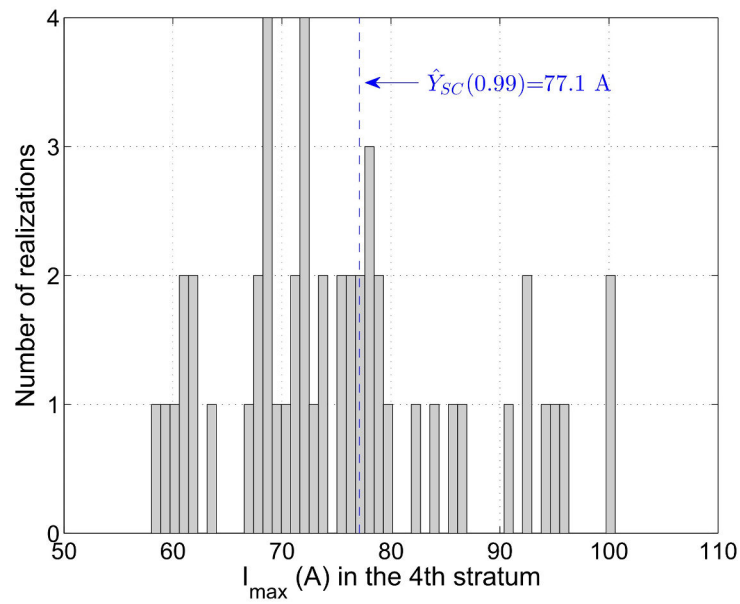
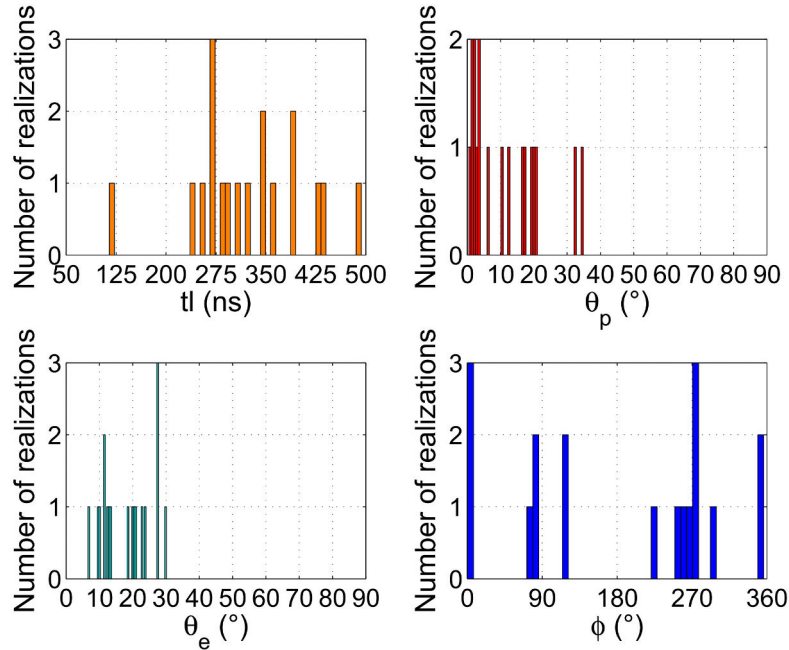
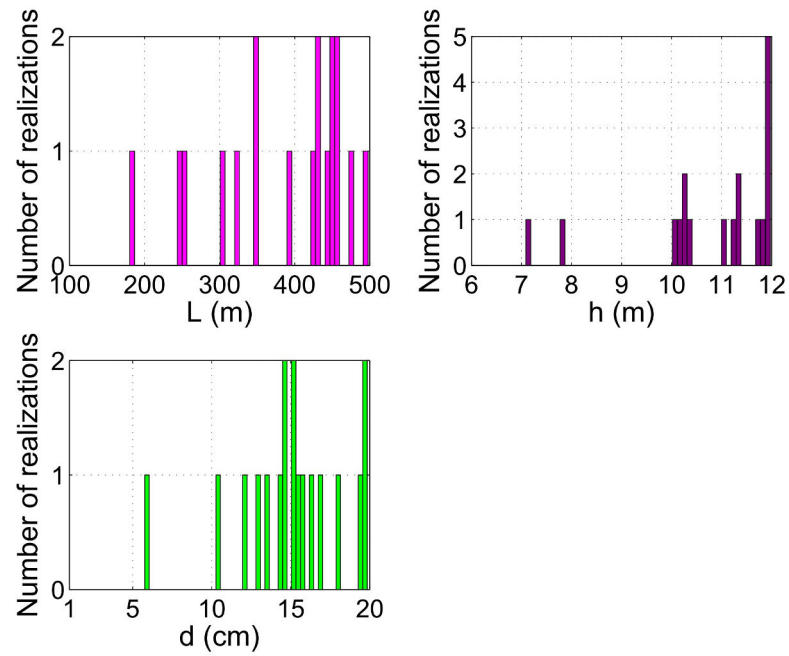


FIGURE 6.16 – Cas d'un sol en terre : histogramme représentant le nombre de réalisations de courant I_{\max} obtenu dans la 4^{ème} strate. Sur les 50 valeurs de courant calculées, 18 valeurs sont supérieures au quantile $\hat{Y}_{SC}(0,99) = 77,1$ A du modèle rigoureux GORF.



(a)



(b)

FIGURE 6.17 – Cas d'un sol en terre : réalisations d'entrée (a) des paramètres incertains de l'onde EM et (b) des paramètres géométriques incertains du câble fournissant des valeurs extrêmes de courant I_{\max} avec le modèle rigoureux GORF.

6.4.5 Conclusion sur la méthode de SC

Dans cette section, une approche par SC a été appliquée dans le contexte de la résolution d'un problème de couplage onde EM-câble. Pour la mise en place de cette technique, nous avons tiré profit de la combinaison entre un modèle simple et un modèle rigoureux pour la prédiction d'un quantile extrême de courant de ce dernier. En effet, l'étude du couplage a été modélisée par la théorie des lignes de transmission (i.e. modèle simple) et par une résolution directe (mais numérique) des équations de Maxwell pour estimer le quantile de niveau 99 % du courant dépendant de paramètres d'entrée incertains. Ce procédé estime le quantile extrême de la réponse d'intérêt par l'intermédiaire de réalisations sélectionnées au préalable par le modèle simple qui est beaucoup moins coûteux en temps de calcul. Cependant, l'identification de réalisations extraites du modèle simple est pertinente car il présente une capacité à reproduire les mêmes tendances relatives aux variables d'entrée que le modèle rigoureux au niveau des valeurs extrêmes.

Par ailleurs, l'étude du câble illuminé par l'onde EM a été effectuée sur un sol rocailleux et un sol en terre, respectivement de conductivité $\sigma = 10^{-3}$ S/m et $\sigma = 5 \times 10^{-2}$ S/m. Pour le sol rocailleux, l'analyse du couplage a montré que les cas extrêmes sont obtenus pour des configurations particulières d'angles de l'onde EM incidente. En effet, les valeurs extrêmes de courant apparaissent essentiellement pour des réalisations de la 1^{ère} moitié du quadrant de l'angle de polarisation θ_p ($[0^\circ; 45^\circ]$), avec une incidence θ_e faible ($[10^\circ; 45^\circ]$), et pour un angle d'azimut proche de l'axe du câble ($\phi \approx 0^\circ$ ou $\phi \approx 359^\circ$). Il est difficile d'extraire une tendance pour les paramètres géométriques (L , h et d) du câble et pour le temps de largeur t_l , même si ce dernier est généralement supérieur à sa valeur moyenne. Ceci signifie que les niveaux extrêmes de courant obtenus sont probablement peu dépendant de la valeur de ces paramètres.

Pour le sol en terre, l'étude montre que les valeurs extrêmes se produisent pour des réalisations similaires d'angles θ_p et θ_e (sur la 1^{ère} moitié du quadrant $[0^\circ; 45^\circ]$). Le comportement de l'angle d'azimut ϕ est quant à lui, très différent par rapport au cas d'un sol rocailleux avec des réalisations qui apparaissent au voisinage des valeurs 0° , 90° et 270° . Les paramètres géométriques du câble semblent avoir plus d'effet sur les niveaux extrêmes de courant, avec des configurations de hauteur h et de diamètre d plus élevées que dans le cas du sol rocailleux.

D'un point de vue physique, l'importance de la hauteur et du diamètre du câble sur ces cas extrêmes d'interférences semble cohérente, dans la mesure où la contribution de l'onde EM réfléchi est plus importante sur le sol de conductivité plus élevée (sol de type « terre »).

La méthode de SC est particulièrement performante dans le contexte d'un sol rocailleux pour lequel la corrélation des deux modèles est forte. Une application de la SCA aurait probablement fourni une meilleure estimation du quantile extrême, mais cela n'a pas été possible en raison d'un manque de temps en fin de thèse. Dans le cas d'un sol de type terre, bien que les réponses des deux modèles soient plus proches, leur corrélation est paradoxalement moins bonne. Elle est cependant suffisante pour extraire des informations pertinentes avec un nombre limité d'appels à GORF.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué les méthodes fiabilistes (FORM, SORM, IS et SS) et la méthode de SC sur un problème réaliste de CEM (de type couplage onde EM-câble).

La mise en oeuvre des méthodes fiabilistes FORM et SORM sur le problème initial a montré des limites pour approximer la surface d'état-limite complexe du problème, qui dépend essentiellement de la nature et du nombre de variables aléatoires d'entrée du problème traité. Une analyse de la géométrie de cette surface d'état-limite au voisinage du point de conception a alors été effectuée. Cette étude a permis d'identifier la variable aléatoire (i.e. l'angle d'azimut ϕ) provoquant des irrégularités et des non-linéarités de cette surface d'état-limite. Une résolution alternative du problème, consistant à partitionner le domaine initial de l'angle d'azimut ϕ de l'onde EM en 4 quadrants a été adoptée. L'analyse fiabiliste a ensuite été effectuée sur chaque quadrant d'angle d'azimut, et a permis de réduire l'erreur commise par FORM et SORM lors des approximations de la probabilité de défaillance P_f . Cependant, l'inconvénient majeur de ces algorithmes est qu'ils ne fournissent aucune indication sur l'erreur commise lors de l'approximation de P_f . Cela nécessite alors d'effectuer une comparaison avec d'autres algorithmes tels que IS et/ou SS pour avoir une idée de la qualité de l'estimation. En ce qui concerne ces deux dernières approches, elles sont beaucoup plus robustes que FORM et SORM, dans la mesure où l'approximation de P_f est basée sur des simulations orientées vers la zone de défaillance. En effet, la méthode IS effectue des tirages aléatoires centrés autour du point de conception de la zone de défaillance, et l'approche par SS échantillonne le domaine en se rapprochant progressivement de la surface d'état-limite. Contrairement à FORM et SORM, elles fournissent une estimation de l'intervalle de confiance associée à P_f mais sont généralement plus coûteuses en termes de nombre d'appels au modèle de calcul. Par ailleurs, l'avantage de l'approximation FORM est de fournir une analyse de sensibilité (i.e. facteurs d'importance), permettant d'identifier les variables prédominantes entraînant le système dans sa zone de défaillance. Nous avons ainsi détecté un rôle plus significatif des paramètres géométriques (L , h) du câble sur les niveaux de courant extrêmes lorsque la conductivité du sol est plus élevée (i.e. sol en terre). Pour résumer, le concepteur CEM doit s'appuyer sur la comparaison et la combinaison des différentes méthodes de fiabilité pour établir un diagnostic plus fiable des résultats obtenus. Il est en effet probable qu'aucune méthode universelle n'apparaisse pour résoudre l'ensemble des problèmes de fiabilité.

Pour ce qui concerne la méthode de SC, elle donne des résultats qui semblent plus fiables en termes de niveaux extrêmes de courant. La corrélation forte (i.e. $\hat{\rho}_I(0,99) = 0,8$) entre le modèle simple et le modèle rigoureux dans le cas du sol rocaillieux, permet d'obtenir de nombreux événements d'interférences extrêmes. A partir de l'identification de ces événements rares, il est possible d'estimer le quantile de niveau 99 % du courant. Dans le cas du sol en terre, bien que la corrélation soit plus faible (i.e. $\hat{\rho}_I(0,99) = 0,3$), elle est cependant suffisante pour une estimation très correcte du quantile de niveau 99 % du courant, même si elle procure moins d'événements extrêmes. En conséquence, elle est probablement associée à une variance plus importante du quantile, cependant incalculable compte tenu des temps de calcul requis. Par ailleurs, l'analyse des niveaux d'interférences extrêmes conforte les conclusions issues de l'analyse fiabiliste (ou réciproquement) en termes de répartition des valeurs prises par les variables aléatoires d'entrée du problème.

Références

- [1] J.-M. Bourinet, C. Mattrand, and V. Dubourg, "A review of recent features and improvements added to FERUM software," in *Proc. of the 10th International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR'09)*, Osaka, Japan, Sept. 2009. [Online]. Available : <http://www.ifma.fr/FERUM>
- [2] E. F. Vance, *Coupling to shielded cables*. Wiley, 1978.
- [3] A. Kouassi, J.-M. Bourinet, S. Lalléchère, P. Bonnet, and M. Fogli, "Fiabilité de fonctionnement et sensibilité CEM pour un problème de ligne de transmission," *17ème Colloque International et Exposition sur la Compatibilité Electromagnétique*, 2014.
- [4] L. Morel, B. Pecqueux, and R. Vézinet, "Notice d'installation et d'utilisation de la version exportable du code GORFF3D," Tech. Rep. CEG I94-28, Oct. 1994.
- [5] H. Le Tellier and F. Flourens, "Manuel d'utilisation GORF3D de résolution par la méthode des différences finies de problèmes électromagnétiques impulsionnels," Tech. Rep. CEG T87-19, Juillet 1987.
- [6] F. Flourens, T. Morel, B. Pecqueux, and R. Vézinet, "Evolution du programme GORFFVE de de résolution de problèmes électromagnétiques impulsionnels. Adaptation au procédé de calcul vectoriel et au système d'exploitation NOS-VE sur ordinateur CDC," Tech. Rep. CEG T89-60 (n°36636/CEG/AEM/HF), Oct. 1989.

Quatrième partie

Bilan et perspectives

Conclusion générale et perspectives

7.1 Conclusion générale

L'objet de ces travaux de thèse concerne l'analyse et la propagation des incertitudes relatives à des paramètres d'entrée incertains sur des réponses de modèles de CEM. Nous nous sommes intéressés à l'estimation de niveaux d'interférences extrêmes dans le cadre de l'étude d'une réponse aléatoire d'un système CEM soumis à une source de perturbation électrique ou électromagnétique, ou réciproquement lorsqu'il émet lui-même de telles perturbations dans l'environnement. Le but était de hiérarchiser l'effet des variables d'entrée sur les réponses extrêmes d'une sortie d'intérêt.

Nous avons ainsi employé les méthodes fiabilistes (FORM, SORM, IS et SS) et la technique de SC pour étudier un problème réaliste de couplage onde EM-câble en prenant en compte des paramètres d'entrée incertains. L'intérêt de ce type d'approche est d'évaluer sous une forme probabiliste des niveaux d'interférences dans le contexte de la conception d'un système dépendant de paramètres incertains. Ces approches probabilistes ont mené à la détermination d'un quantile extrême des observations de sorties ou à la quantification d'une probabilité de dépassement d'un seuil de risque du système. Le but ciblé par ce type d'approche est de proposer, via des analyses de sensibilité, des stratégies de conception plus robustes.

Dans un premier temps, nous avons eu recours aux méthodes fiabilistes pour quantifier une probabilité de défaillance P_f définie comme la probabilité de dépassement d'un seuil prescrit, en considérant des incertitudes relatives aux paramètres d'entrée. L'efficacité de ces méthodes dépend essentiellement de la géométrie de la surface d'état limite (i.e. frontière entre les domaines de défaillance et de sûreté) du problème. Lorsque la forme de cette surface est trop irrégulière et non-linéaire, les méthodes FORM et SORM peuvent échouer à estimer correctement P_f . Une investigation approfondie au voisinage du point de conception peut alors permettre d'identifier les variables aléatoires d'entrée provoquant ces irrégularités. Une résolution alternative du problème permet ensuite de réduire sa complexité, en partitionnant le domaine initial de la variable (provoquant des irrégularités) en sous domaines. Dans ce cas,

l'efficacité des méthodes FORM et SORM pour estimer P_f peut alors être significative, en termes de nombre d'appels au modèle numérique par rapport à une approche classique de type MC. Toutefois, la limite de ces techniques est qu'elles n'indiquent aucune information sur l'erreur d'estimation de P_f . Il est alors possible de vérifier la qualité de l'estimation de P_f par comparaison avec des méthodes de simulation de type IS et/ou SS. Ces deux dernières approches, basées sur des simulations orientées vers la zone de défaillance, sont beaucoup plus robustes que FORM et SORM. Elles permettent également d'obtenir un intervalle de confiance associé à l'estimation de P_f . L'avantage principal de la technique FORM est de procurer une analyse de sensibilité par l'intermédiaire des facteurs d'importance. L'atout de ces facteurs est qu'ils peuvent renseigner un ingénieur CEM sur les variables susceptibles d'engendrer un défaut de son système. À partir de ces informations, le concepteur CEM peut ensuite proposer une stratégie de conception adaptée. Il devra cependant avoir recours aux différentes méthodes pour fournir l'estimation la plus fiable possible des niveaux d'interférences.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à l'application de la méthode de SC. L'avantage de cette méthode réside dans le fait d'estimer le quantile extrême d'une observation issue du modèle initial (i.e. rigoureux) à partir de l'utilisation d'un modèle plus grossier (et donc en général bien moins coûteux en temps de calcul). L'éligibilité du modèle grossier est relative à sa capacité à reproduire une tendance semblable en termes de sensibilité aux paramètres d'entrée lorsque l'observation tend vers une valeur extrême. Le principal atout de cette méthode réside dans sa capacité à fournir des jeux de données adaptés à la recherche du quantile à estimer. Ce jeu de données est fourni par le modèle grossier qui doit préalablement être recherché. Le modèle grossier doit posséder des propriétés particulières de corrélation avec le modèle exact, sans pour autant exiger des réponses très proches de ce dernier. Cette corrélation repose sur l'ordre des réponses du modèle simple et du modèle rigoureux. Autrement dit, les deux réponses doivent posséder une tendance similaire selon l'évolution des variables aléatoires d'entrée. La difficulté principale de la technique de SC consiste à identifier un modèle grossier suffisamment corrélé en ce sens au modèle rigoureux. Quelques pistes menant à l'identification d'un modèle simple peuvent tout de même être établies. Il peut reposer sur une modélisation grossière de la géométrie du problème considéré, comme par exemple une cavité de forme simplifiée en lieu et place d'une structure à géométrie plus complexe telle un avion ou un bateau. La simplification du modèle peut également se faire sur le modèle numérique utilisé. Un modèle de résolution numérique avec un schéma spatio-temporel très relâché ou un métamodèle construit à partir de techniques statistiques peuvent également être considérés comme modèles simples. Il est important de noter que le choix de ce dernier dépend principalement du problème traité. Par ailleurs, une fois le modèle simple identifié, il peut être exploité pour estimer un nombre très significatif de valeurs extrêmes avec le modèle rigoureux, et par conséquent, déterminer les tendances relatives aux paramètres d'entrée incertains fournissant ces cas extrêmes.

Ces outils d'analyse permettent de quantifier les risques en CEM à partir d'une information relativement modeste sur les paramètres d'entrée incertains tels que la position d'un câble et/ou la direction d'une onde incidente. D'un point de vue pratique, les deux types de techniques apportent des informations pertinentes pour l'analyse de risque d'un système. Cependant, si l'on dispose d'un modèle simple corrélé de manière significative à un modèle rigoureux, nous préconisons alors l'utilisation de la technique de SC pour une estimation des valeurs extrêmes.

7.2 Perspectives

Nous exposons dans cette section quelques perspectives de recherche en étroite liaison avec ces travaux de thèse.

Analyse de régularité de la surface d'état-limite

Dans cette thèse, nous avons montré que l'efficacité des méthodes fiabilistes (FORM, SORM, IS) dépend de la régularité de la surface d'état-limite (i.e. limite entre les domaines de sûreté et de défaillance). Dans le cas où cette surface est trop irrégulière, une analyse *a posteriori* de sa géométrie au voisinage du point de conception peut permettre d'identifier le ou les groupes de variables aléatoires d'entrée produisant cet effet. Cette procédure n'est possible, qu'après avoir effectué une analyse par la méthode FORM. Le recours à une technique d'échantillonnage par plan d'expériences par exemple, pourrait permettre d'identifier la géométrie de la surface d'état-limite sous la forme de restrictions ou de partitions du domaine des variables aléatoires, et ainsi optimiser l'application des méthodes fiabilistes.

Identification d'un bon modèle simple pour une application de la stratification contrôlée

L'application de la méthode de SC a permis de vérifier dans un contexte de paramètres d'entrée incertains, qu'il était possible d'accélérer l'estimation de réalisations extrêmes d'un modèle rigoureux, à partir de l'utilisation d'un modèle simple qui lui est fortement corrélé au sens de 5.14. L'un des défis majeurs concernant l'approche par SC, est d'identifier des modèles simples adaptés à des situations de modélisation de CEM. Nous avons montré qu'un modèle rigoureux avec un maillage relâché en lieu et place d'un maillage fin de résolution numérique des équations de Maxwell, peut être un bon postulant. Cependant, d'autres pistes de recherche de modèles restent à explorer. On peut notamment citer les modèles de circuit et les modèles analytiques. Des métamodèles tels que le krigeage ou le *chaos polynomial*, construits à partir d'un plan d'expériences permettant d'échantillonner la zone d'intérêt (i.e. zone des valeurs extrêmes), pourraient être des candidats potentiels.

Choix d'une distribution de valeurs extrêmes

L'obtention d'événements extrêmes d'un observable, lorsqu'un nombre raisonnable de réalisations est disponible, peut conduire à l'ajustement d'une distribution de valeurs extrêmes. Dans certains travaux effectués en CEM [1–3], la distribution de valeurs extrêmes choisie est la distribution de Pareto généralisée (souvent sélectionnée par la méthode de maximum de vraisemblance). La forme de cette distribution dépend du paramètre de forme ξ ($\xi \in \mathbb{R}$), qui spécifie le comportement de la distribution dans sa queue. Les valeurs $\xi = 0$, $\xi > 0$, $\xi < 0$ correspondent respectivement, aux distributions de Gumbel, Fréchet et Weibull. La connaissance *a priori* du type de distribution adaptée à la réponse aléatoire du système observé pourrait permettre un ajustement paramétrique plus fin de la distribution de probabilité des valeurs extrêmes.

Références

- [1] C. Kasmi, M. Hélier, M. Darces, and E. Prouff, “Generalised pareto distribution for extreme value modelling in electromagnetic compatibility,” *Electronics Letters*, vol. 49, no. 5, pp. 334–335, Feb. 2013.
- [2] —, “Modeling extreme values resulting from compromising electromagnetic emanations generated by an information system,” *Comptes Rendus Physique*, Apr. 2014.
- [3] T. Bdour and A. Reineix, “Statistical estimation of maximum electric field in electrically large cavity using extreme value theory,” in *Electromagnetic Compatibility (EMC), 2015 IEEE International Symposium on*, Aug. 2015, pp. 1426–1429.

Publications

Revue internationale à comité de lecture

- [1] M. Larbi, P. Besnier, B. Pecqueux, "Probability of EMC failure and sensitivity analysis with regard to uncertain variables by reliability methods," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, no.2, pp.274-282, Apr. 2015.
- [2] M. Larbi, P. Besnier, B. Pecqueux, "The adaptive controlled stratification method applied to the determination of extreme interference levels in EMC Modelling with uncertain input variables," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, accepted in December 2015.

Communications internationales avec actes et à comité de lecture

- [1] M. Larbi, P. Besnier, B. Pecqueux, "Approche fiabiliste dans un contexte CEM" *17ème Colloque International et Exposition sur la Compatibilité Électromagnétique (CEM 2014)*, Clermont-Ferrand, France, 1-3 Juil., 2014.
- [2] M. Larbi, P. Besnier, B. Pecqueux, "Estimation of failure probability of the end induced current depending on uncertain parameters of a transmission line", *General Assembly and Scientific Symposium (URSI GASS)*, Beijing, China, pp.1-4, Aug. 16-23, 2014.
- [3] M. Larbi, P. Besnier, B. Pecqueux, "Probability of extreme interference levels computed from reliability approaches : application to transmission lines with uncertain parameters", *International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC Europe)*, Gothenburg, Sweden, pp.647-652, Sep. 1-4, 2014.
- [4] M. Larbi, P. Besnier, B. Pecqueux, "The controlled stratification to estimate extreme quantiles in the field of EMC modelling", *International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC Europe)*, Dresden, Germany, pp.334-339, Aug. 16-22, 2015.

Workshops

- [1] M. Larbi, P. Besnier, B. Pecqueux, "Reliability and sensitivity analysis of extreme electromagnetic events by considering uncertain parameters" *Forum CEA-DAM*, Bruyères-le Châtel, France, 1-2 Oct., 2014.

- [2] M. Larbi, P. Besnier, B. Pecqueux, F. Puybaret, "Reliability methods applied to a transmission line illuminated by a plane wave" *Uncertainty Modeling for Electromagnetic Applications (UMEMA)*, Saint-Nectaire, France, du 29 Juin au 1^{er} Juillet, 2015.

Annexes

A.1 Méthode des moments

Un point important dans l'inférence statistique est l'estimation des paramètres d'une distribution à partir d'un échantillon d'observations. La *méthode des moments* est probablement le moyen le plus simple pour estimer ces paramètres, notés θ . Elle est basée sur le calcul empirique des moments de l'échantillon observé. En attribuant les moments empiriques aux moments de la variable X , on obtient un système d'équations.

Ainsi, si X suit une loi gamma de paramètres $\theta = (a, b)^T$, avec $()^T$ représentant la transposition, l'espérance et la variance (les deux premiers moments) sont données par :

$$E[X] = \frac{a}{b} \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Var}[X] = \frac{a}{b^2} \quad (\text{A.2})$$

De manière équivalente, ceci conduit à :

$$a = \frac{E[X]^2}{\text{Var}[X]} \quad (\text{A.3})$$

$$b = \frac{E[X]}{\text{Var}[X]} \quad (\text{A.4})$$

Soit $\mathcal{X} = \{x^{(1)}, \dots, x^{(K)}\}$ un échantillon de X , qu'on suppose de loi gamma. Soient $\tilde{\mu}_X$, la moyenne empirique et $\tilde{\sigma}_X^2$, la variance empirique de cet échantillon. Les estimateurs \hat{a} de a et \hat{b} de b sont obtenus directement :

$$\hat{a} = \frac{\tilde{\mu}_X^2}{\tilde{\sigma}_X^2} \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{b} = \frac{\tilde{\mu}_X}{\tilde{\sigma}_X^2} \quad (\text{A.6})$$

D'autres choix sont en revanche possibles mais on recherche en général les meilleurs estimateurs possible. La méthode du maximum de vraisemblance est souvent utilisée à cette fin.

A.2 Méthode du maximum de vraisemblance

L'estimation par *maximum de vraisemblance* (MV) est une méthode statistique courante utilisée pour inférer les paramètres de la distribution de probabilité d'un échantillon donné. Cette méthode a été développée par le statisticien Ronald Fischer en 1922, elle est connue pour être plus robuste que la méthode des moments. Supposons que le vecteur aléatoire \mathbf{X} ait une distribution connue $f_{\mathbf{X}}$. La méthode du maximum de vraisemblance estime les paramètres $\boldsymbol{\theta}$ d'un modèle linéaire ou non linéaire à partir d'un échantillon $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(K)}\}$. La méthode repose sur l'introduction d'une fonction L appelée vraisemblance (*i.e.* la densité de probabilité évaluée en les observations) définie par :

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(K)}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(K)}|\boldsymbol{\theta}) \quad (\text{A.7})$$

et sur la maximisation de son logarithme par rapport au vecteur de paramètres inconnus $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_{n_{\theta}}\}$. Lorsque les observations sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(K)}) = \prod_{k=1}^K f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}^{(k)}|\boldsymbol{\theta}). \quad (\text{A.8})$$

Le principe du maximum de vraisemblance énonce que le meilleur estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{MV}}$ est celui qui maximise $L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(K)})$ par rapport à $\boldsymbol{\theta}$. Cela revient à minimiser l'opposé de la log-vraisemblance :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{MV}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n_{\theta}}} \left(- \sum_{i=1}^K \ln(f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}^{(i)}|\boldsymbol{\theta})) \right). \quad (\text{A.9})$$

Si $f_{\mathbf{X}}$ est dérivable, $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{MV}}$ s'obtient en résolvant le système d'équation aux dérivées partielles de la log-vraisemblance $\ln L$ par rapport aux paramètres inconnus $(\theta_1, \dots, \theta_{n_{\theta}})$:

$$\frac{\partial \ln(L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(K)}))}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n_{\theta}. \quad (\text{A.10})$$

Inférence statistique bayésienne

Les *méthodes bayésiennes* sont utilisées pour calculer ou réviser la probabilité d'une hypothèse. Elles s'appuient sur une description générale d'inversion des probabilités donnée par le *théorème de Bayes* (Bayes, 1753) : Si A et B sont des événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $\mathbb{P}(A|B)$ et $\mathbb{P}(B|A)$ sont reliés par :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \quad (\text{B.1})$$

Ce théorème est aussi un principe d'actualisation, car il décrit la mise à jour de la vraisemblance de A, en passant de $\mathbb{P}(A)$ vers $\mathbb{P}(A|B)$, une fois que B a été observé. Bayes (1763) donne également une version continue de ce théorème, à savoir, pour deux variables aléatoires x et y , de distribution conditionnelle $f(x|y)$ et marginale $g(y)$, la distribution conditionnelle de y sachant x est

$$g(y|x) = \frac{f(x|y)g(y)}{\int f(x|y)g(y)dy}. \quad (\text{B.2})$$

Bien que ce théorème d'inversion soit naturel d'un point de vue probabiliste, Bayes et Laplace sont allés plus loin et ont considéré que l'*incertitude* sur le paramètre θ d'un modèle peut être décrite par une distribution de probabilité π sur Θ , appelée *distribution a priori*. L'inférence est alors fondée sur la distribution de θ conditionnelle à x , $\pi(\theta|x)$, appelée *distribution a posteriori* et définie par :

$$\pi(\theta|x) = \frac{L(\theta|x)\pi(\theta)}{\pi(x)} \quad (\text{B.3})$$

avec $L(\theta|x)$, la fonction de vraisemblance qui est simplement une densité réécrite dans le bon ordre, soit donc comme fonction de θ , qui est *inconnu*, dépendant de la valeur observée x .

B.1 Exemple (Laplace, 1773 [1])

Une urne contient un nombre n de cartes noires et blanches. Si la première carte sortie de l'urne est blanche, *quelle est la probabilité que la proportion p de cartes blanches soit p_0 ?*

Pour résoudre ce problème, Laplace suppose que tous les nombres de 2 à $n - 1$ sont équiprobables comme valeurs de $p \times n$, donc que p soit uniformément distribué sur $\{2/n, \dots, (n-1)/n\}$. La distribution a posteriori de p peut être alors calculée en utilisant le théorème de Bayes (B.1),

$$\mathbb{P}(p = p_0 | \text{données}) = \frac{p_0 \times 1/(n-2)}{\sum_{p=2/n}^{(n-1)/n} p \times 1/(n-2)} = \frac{n p_0}{n(n-1)/2 - 1} \quad (\text{B.4})$$

Le choix précédent de la distribution a priori peut être contesté comme étant partiellement arbitraire. Cependant, dans le contexte de la théorie des probabilités de Laplace, la plupart des événements peuvent être décomposés en événements *équiprobables* élémentaires et par conséquent, dans ce cas particulier, il semble raisonnable de considérer les événements $\{p = i/n\}$ ($2 \leq i \leq n-1$) comme élémentaires.

C.1 Loi gaussienne

Une variable aléatoire continue X suit une loi gaussienne de moyenne μ et d'écart type σ , notée $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, lorsque la fonction de densité de probabilité s'écrit de la manière suivante :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{C.1})$$

C.2 Loi uniforme

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On appelle loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ la loi de probabilité continue dont la fonction de densité de probabilité est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{C.2})$$

Cette mesure est notée $\mathcal{U}([a, b])$.

Références

- [1] C. P. Robert, *Le choix bayésien : Principes et pratique*. Springer, 2006.

Table des figures

2.1	Photo d'un faisceau de câbles à l'intérieur d'un A380 [1].	9
2.2	Carte des différents centres CEA en France.	10
2.3	Générateur capable de reproduire l'IEMN à échelle réelle sur des systèmes.	11
2.4	Chambre anéchoïque pour l'étude de la vulnérabilité aux micro-ondes de forte puissance.	12
2.5	Schéma général pour l'analyse d'incertitudes [4].	16
3.1	Le métamodèle krigeage et l'intervalle de confiance associé à 95 % [7].	29
4.1	Illustration de l'itération de l'algorithme HLRP [12].	51
4.2	Principe de l'approximation FORM : construction de l'hyperplan tangent au point de conception ξ^*	52
4.3	Approximation SORM : construction d'une hyper-surface d'ordre 2 (i.e. paraboloïde) au point de conception ξ^*	53
4.4	Échantillonnage concentré autour du point de conception ξ^*	55
4.5	La procédure de la méthode de subset simulation : (a) Niveau Conditionnel 1 : simulation de MC standard; (b) Niveau Conditionnel 1 : sélection adaptative du 1 ^{er} seuil; (c) Niveau Conditionnel 2 : simulation de MCMC; (d) Niveau Conditionnel 2 : sélection adaptative du 2 ^{ème} seuil; (e) Niveau Conditionnel 3 : simulation de MCMC; (f) Niveau Conditionnel 3 : sélection adaptative du 3 ^{ème} et dernier seuil [20].	57
4.6	Ligne de transmission à deux fils conducteurs au-dessus d'un plan de masse de type conducteur électrique parfait (PEC) avec des aléas uniformes sur : les impédances R_1, R_2, R_3 , les hauteurs h_1, h_2 , et la longueur des fils Lg	59
4.7	Représentation de la fonction d'état-limite g en fonction du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = \{R_1, R_2\}$ dans l'espace physique (a) et dans l'espace gaussien (b) obtenue à partir de 2000 réalisations par simulation de MC. Les réalisations dans le domaine de sûreté sont en bleu et celles dans le domaine de défaillance sont en magenta. La réalisation en rouge est l'évaluation de g pour les valeurs moyennes des variables et la réalisation en vert est le point de conception ξ^* où l'hyperplan FORM (en noir) est déterminé.	60
4.8	Représentation du courant induit $I_2(Lg)$ en fonction de la bande de fréquence [5-10 MHz] obtenue à partir de 10 réalisations par simulation de MC dépendant des variables aléatoires uniformes suivantes : les impédances R_1, R_2, R_3 , les hauteurs h_1, h_2 et la longueur Lg des câbles.	61
4.9	Évaluation de la fonction d'état-limite g en fonction de la composante de la variable aléatoire R_1 (parmi les six variables aléatoires) dans l'espace physique (a) et dans l'espace de la variable aléatoire gaussienne correspondante (b) obtenue à partir de 2000 réalisations par simulation de MC. Les réalisations dans le domaine de sûreté sont en bleu et celles dans le domaine de défaillance sont en magenta. La réalisation en rouge est l'évaluation de g en la valeur moyenne de R_1 et la réalisation en vert est la composante ξ_1^* du point de conception ξ^* où l'hyperplan FORM (en noir) est effectué.	63
4.10	Illustration par histogramme des niveaux du maximum de courant induit $I_2(Lg)$ dans la bande de fréquence [5-10 MHz] (en bleu) et de la pdf gaussienne de défaillance de l'équipement électronique R_4 (en rouge). Le domaine surligné en rouge sous la pdf gaussienne est la probabilité de défaillance $P_{f,\text{sys}}$ du système. R_1 est distribué uniformément entre 1 Ω et 10 Ω	64
4.11	Élasticités des bornes inférieures de chaque variable aléatoire d'entrée obtenues par l'analyse FORM pour le seuil de $I_t = 60$ mA.	66

4.12	Histogramme représentant les niveaux du maximum de courant induit $I_2(Lg)$ dans la bande de fréquence $[5 - 10 \text{ MHz}]$ (en bleu) et tracé de la pdf gaussienne de défaillance de l'équipement électronique R_4 (en rouge). Le domaine surligné en rouge sous la pdf gaussienne est la probabilité de défaillance $P_{f,\text{sys}}$ du système. R_1 est distribué uniformément entre 2Ω et 10Ω .	67
5.1	Vue d'ensemble (a) et vue de dessus (b) des 4 fils conducteurs au-dessus d'un plan de masse de type conducteur électrique parfait.	79
5.2	Évaluation du courant induit I_{42} au sein de la bande de fréquence $[70-110 \text{ MHz}]$. Deux configurations aléatoires de variables d'entrée sont utilisées en (a) et (b) pour le calcul du courant I_{42} avec le modèle simple TLT (courbe avec astérisques rouges) et avec le modèle rigoureux MoM (courbe avec carrés bleus).	82
5.3	Histogramme représentant le nombre de réalisations de courant obtenu dans la 4 ^{ème} strate. Parmi les 50 valeurs de courant calculées, 33 valeurs sont supérieures au quantile de référence $\hat{Y}_{EE}(0,95) = 0,4521 \text{ mA}$.	83
5.4	Le courant induit I_{42} est évalué sur la bande de fréquence $[70-110 \text{ MHz}]$. Deux configurations aléatoires des variables d'entrée sont utilisées en (a) et (b) afin de calculer I_{42} avec le modèle simple MoM _{coa} (courbe avec cercles roses) et avec le modèle rigoureux MoM (courbe avec carrés bleus).	87
5.5	Ajustement de (a) la pdf et (b) de la cdf de la distribution de Pareto généralisée sur des valeurs extrêmes de courant identifiées par le modèle simple TLT dans les 3 ^{ème} et 4 ^{ème} strate.	91
6.1	Câble enterré dans un sol réel illuminé par une onde EM.	98
6.2	(a) Onde EM de forme bi-exponentielle dans le domaine temporel avec un temps de montée t_m et un temps de largeur t_l . (b) Représentation de l'onde EM dans le domaine fréquentiel.	99
6.3	Cas d'un sol rocaillieux : représentation du courant I_{max} à partir de 1000 réalisations par simulation de MC.	101
6.4	Cas d'un sol rocaillieux : analyse de sensibilité globale du courant I_{max} par indices de Sobol (indices du 1 ^{er} ordre et indices totaux).	101
6.5	Plans de coupe autour du point de conception ξ^* (en vert) identifié par FORM.	103
6.6	Cas d'un sol rocaillieux : histogramme du courant I_{max} obtenu à partir de 1000 réalisations par simulation de MC sur chaque quadrant d'angle d'azimut ϕ .	104
6.7	Cas d'un sol rocaillieux : facteurs d'importance (obtenus par FORM) sur chaque quadrant d'angle d'azimut ϕ .	106
6.8	Cas d'un sol en terre : représentation du courant I_{max} à partir de 1000 réalisations par simulation de MC.	108
6.9	Cas d'un sol en terre : analyse de sensibilité globale du courant I_{max} par indices de Sobol (indices du 1 ^{er} ordre et indices totaux).	108
6.10	Cas d'un sol en terre : histogramme du courant I_{max} obtenu à partir de 1000 réalisations par simulation de MC sur chaque quadrant d'angle d'azimut ϕ .	109
6.11	Cas d'un sol en terre : facteurs d'importance (issus de l'approximation FORM) sur chaque quadrant d'azimut ϕ .	112
6.12	Cas d'un sol rocaillieux : évolution temporelle de l'amplitude du courant $ I $ à l'extrémité du câble. Deux configurations aléatoires de variables d'entrée sont considérées en (a) et (b) pour le calcul de $ I $ avec le modèle simple TLT (courbe rouge) et avec le modèle rigoureux GORF (courbe bleue).	115
6.13	Cas d'un sol rocaillieux : histogramme représentant le nombre de réalisations de courant I_{max} obtenu dans la 4 ^{ème} strate. Parmi les 50 valeurs de courant calculées, 48 valeurs sont supérieures au quantile $\hat{Y}_{SC}(0,99) = 72,0 \text{ A}$ du modèle rigoureux GORF.	117
6.14	Cas d'un sol rocaillieux : réalisations d'entrée (a) des paramètres incertains de l'onde EM et (b) des paramètres géométriques incertains du câble fournissant des valeurs extrêmes de courant I_{max} avec le modèle rigoureux GORF.	118
6.15	Cas d'un sol en terre : évolution temporelle de l'amplitude du courant $ I $ à l'extrémité du câble. Deux réalisations des variables aléatoires d'entrée sont utilisées en (a) et (b) pour l'évaluation de $ I $ avec le modèle simple TLT (courbe rouge) et avec le modèle rigoureux GORF (courbe bleue).	120
6.16	Cas d'un sol en terre : histogramme représentant le nombre de réalisations de courant I_{max} obtenu dans la 4 ^{ème} strate. Sur les 50 valeurs de courant calculées, 18 valeurs sont supérieures au quantile $\hat{Y}_{SC}(0,99) = 77,1 \text{ A}$ du modèle rigoureux GORF.	122

6.17	Cas d'un sol en terre : réalisations d'entrée (a) des paramètres incertains de l'onde EM et (b) des paramètres géométriques incertains du câble fournissant des valeurs extrêmes de courant I_{\max} avec le modèle rigoureux GORF	123
------	---	-----

Liste des tableaux

3.1	Synthèse des méthodes statistiques.	40
4.1	Comparaison des méthodes de fiabilité dans la bande de fréquence [5-10 MHz] lorsque R_1 est distribué uniformément entre $1\ \Omega$ et $10\ \Omega$	65
4.2	Comparaison des méthodes de fiabilité dans la bande de fréquence [5-10 MHz] lorsque R_1 est distribué uniformément entre $2\ \Omega$ et $10\ \Omega$	68
5.1	Cas d'un modèle simple basé sur la TLT : comparaison des résultats obtenus par SC, SCA et EE pour l'estimation du quantile d'ordre 95 % du courant.	85
5.2	Cas d'un modèle simple basé sur une simulation « full-wave » avec un maillage grossier : comparaison des résultats obtenus par SC, SCA et EE pour l'estimation du quantile d'ordre 95 % du courant.	88
6.1	Cas d'un sol rocailleux : estimation de $P_f = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80\ \text{A})$	102
6.2	Cas d'un sol rocailleux : estimation de $P_{f_1} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80\ \text{A} \mid \phi \in [0^\circ; 90^\circ])$ par les méthodes de fiabilité.	105
6.3	Cas d'un sol rocailleux : estimation de $P_{f_2} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80\ \text{A} \mid \phi \in [90^\circ; 180^\circ])$ par les méthodes de fiabilité.	105
6.4	Cas d'un sol rocailleux : estimation de $P_{f_3} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80\ \text{A} \mid \phi \in [180^\circ; 270^\circ])$ par les méthodes de fiabilité.	105
6.5	Cas d'un sol rocailleux : estimation de $P_{f_4} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80\ \text{A} \mid \phi \in [270^\circ; 359^\circ])$ par les méthodes de fiabilité.	105
6.6	Cas d'un sol rocailleux : estimation de $P_f = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80\ \text{A})$ par les méthodes de fiabilité.	105
6.7	Cas d'un sol en terre : estimation de $P_{f_1} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80\ \text{A} \mid \phi \in [0^\circ; 90^\circ])$ par les méthodes de fiabilité.	110
6.8	Cas d'un sol en terre : estimation de $P_{f_2} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80\ \text{A} \mid \phi \in [90^\circ; 180^\circ])$ par les méthodes de fiabilité.	111
6.9	Cas d'un sol en terre : estimation de $P_{f_3} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80\ \text{A} \mid \phi \in [180^\circ; 270^\circ])$ par les méthodes de fiabilité.	111
6.10	Cas d'un sol en terre : estimation de $P_{f_4} = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80\ \text{A} \mid \phi \in [270^\circ; 359^\circ])$ par les méthodes de fiabilité.	111
6.11	Cas d'un sol en terre : estimation de $P_f = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80\ \text{A})$ par les méthodes de fiabilité.	111
6.12	Cas d'un sol rocailleux : estimation de $P_f = \mathbb{P}(I_{\max} \geq 80\ \text{A})$ par les méthodes de fiabilité.	111

AVIS DU JURY SUR LA REPRODUCTION DE LA THESE SOUTENUE

Titre de la thèse:

Méthodes statistiques pour le calcul d'interférences électromagnétiques extrêmes au sein de systèmes complexes

Nom Prénom de l'auteur : LARBI MOURAD

Membres du jury :

- Monsieur BESNIER Philippe
- Monsieur POULIGUEN Philippe
- Monsieur KERHERVE Eric
- Monsieur PECQUEUX Bernard
- Monsieur PUYBARET Frédéric
- Monsieur CANAVERO Flavio
- Madame RICHALOT Elodie
- Monsieur BONNET Pierre

Président du jury : Elodie RICHALOT

Date de la soutenance : 11 Février 2016

Reproduction de la these soutenue

Thèse pouvant être reproduite en l'état

Thèse pouvant être reproduite après corrections suggérées

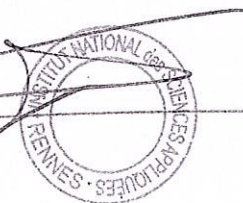
Fait à Rennes, le 11 Février 2016

Signature du président de jury



Le Directeur,

M'hamed DRISSI



Résumé

La prolifération des électroniques et des émetteurs radiofréquences rend de plus en plus compliqué le processus de conception des systèmes sur le plan CEM. Ce processus doit aboutir à limiter le risque d'interférences ou de défauts au niveau le plus faible notamment dans le contexte des interférences électromagnétiques intentionnelles (IEMI). Ces défauts CEM doivent alors être anticipés lors de la phase de conception. Cependant, du fait de la dispersion des valeurs prises par certains paramètres du système, la modélisation déterministe éprouve quelques difficultés à identifier le risque encouru. La mauvaise connaissance de l'effet des incertitudes associées au système, aboutit alors à prendre des marges de conception considérables conduisant à des surcoûts de fabrication. Pour cette raison, il est devenu important de prendre en compte l'impact des incertitudes des différents paramètres constitutifs d'un système (en phase de conception). Ces paramètres sont essentiellement géométriques (e.g. position de câblages) ou électromagnétiques (e.g. caractéristiques intrinsèques de matériaux). Ils influent par nature sur les performances CEM de ce système.

Ces travaux de thèse portent sur l'analyse de la propagation des incertitudes relatives à ces paramètres sur des sorties de modèles de CEM. Le but visé, consiste à quantifier sous une forme probabiliste, le risque de défaut d'un système contenant de nombreux paramètres incertains. Ce type d'étude statistique devrait également permettre, via des analyses de sensibilité, des stratégies de conception de systèmes « fiables » ou à moindres coûts.

Dans le contexte des applications visées, les approches dites « fiabilistes » et la méthode dite de « stratification contrôlée », ont été identifiées comme intéressantes, du point de vue de l'analyse d'événements extrêmes.

Dans un premier temps, nous nous sommes consacrés à la transposition des méthodes fiabilistes dans un contexte CEM. Ces techniques permettent de quantifier la probabilité de défaillance d'un système, définie comme le dépassement d'un seuil de risque, et renseignent, via une analyse de sensibilité locale, sur les paramètres clés à ajuster.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à la méthode de stratification contrôlée, non appliquée à ce jour à notre connaissance en CEM. L'objectif de cette approche consiste à estimer un quantile extrême de la réponse d'intérêt d'un modèle rigoureux, via l'utilisation d'un modèle simple beaucoup moins coûteux en termes de temps de calcul. Ce processus permet d'accélérer l'obtention d'observations extrêmes, nécessaires à l'estimation du quantile recherché.

Les deux techniques ont été mises en œuvre sur un problème complexe dans un contexte IEMI, pour estimer la probabilité d'occurrence d'événements d'interférences extrêmes. Elles ont permis de dégager des tendances similaires, quant à l'importance de certains paramètres d'entrée incertains sur les événements rares.

Les deux méthodes, bien appliquées, pourraient constituer un apport considérable en matière de conception CEM.

Abstract

The proliferation of electronic and radio frequency transmitters makes more complicated the system design process on the EMC point of view. This process should lead to limit the risk of interferences or defects to lowest level particularly in the context of intentional electromagnetic interferences (IEMI). Therefore, these EMC defects have to be anticipated during the design stage. However, due to the dispersion of the values taken by some parameters of the system, the deterministic modeling presents some difficulties to identify the involved risk. The poor knowledge of the uncertainties effect associated with the system, leads then to take important design margins at the price of additional costs of manufacturing. For this reason, it has become important to take into account the impact of uncertainties of the various constituent parameters of a system (at the design stage). These parameters are essentially geometric (e.g. position of wirings) or electromagnetic (e.g. intrinsic characteristics of materials) ones. They influence by nature the EMC performance of this system.

This thesis work deals with the analysis of the propagation of uncertainties of these parameters on EMC model outputs. It aims at quantifying in a probabilistic form, the default risk of a system containing numerous uncertain parameters. This type of statistical analysis should also allow through sensitivity analyses, design strategies of "reliable" systems or at lower cost.

In the context of targeted applications, the so-called "reliability approaches" and the "controlled stratification" method have been identified as interesting from the point of view of the analysis of extreme events.

Firstly, we are dedicated to the transposition of reliability methods in an EMC context. These techniques are used to quantify the probability of failure of a system, defined as the probability of exceeding a threshold of risk. They inform through a local sensitivity analysis, on the key parameters to adjust.

Secondly, we have focused our work on the controlled stratification method, not yet applied in EMC as far as we know. The objective of this approach is to estimate an extreme quantile of the interest response of a rigorous model, using of a much cheaper simple model in terms of computation time. This process allows to speed up the identification of extreme observations required for the estimation of the researched quantile.

Both techniques have been applied on a complex problem in an IEMI context, to estimate the probability of occurrence of extreme interference events. They have revealed similar trends as regards to the importance of some uncertain input parameters on rare events.

Both methods, properly applied, could provide a significant contribution in terms of EMC design strategy.